$\boxed{1}$

解答を上から書き下します。

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m\left\{(\dot{x_s} + l\dot{\theta}\,cos\,\theta)^2 + l^2\dot{\theta}^2\,sin^2\theta\right\} && (1) \\
V &= mgl(1 - cos\theta) && (2) \\
L &= \frac{1}{2}m\left\{(\dot{x_s} + l\dot{\theta}\,cos\,\theta)^2 + l^2\dot{\theta}^2\,sin^2\theta\right\} - mgl(1 - cos\,\theta) && (3) \\
& \left(l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\,sin\,\theta\right) = -\left(\frac{d^2x_s}{dt^2}\right)cos\,\theta && (4) \\
l\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -g\,sin\,\theta + \omega^2 cos\,\theta \cdot x_s && (5)
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$

(1)

$rot\,\vec{E} = 0$　　電磁誘導

$div\,\vec{D} = 0$　　ガウスの法則

$rot\,\vec{H} = i$　　アンペールの法則

$div\,\vec{B} = 0$　　ガウスの法則

i：電流密度　　$\vec{E}$：電場　　$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$

ρ：電荷密度　　$\vec{B}$：磁場　　$\vec{B} = \mu\vec{H}$

(2)

普通の形式

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

微分形式

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

説明：　$\vec{B}$ の時間変化で $\vec{B}$ と垂直方向に $\vec{E}$ が生じる。

(3)

$$rot\,\vec{H} = \vec{i}$$

これは、電荷保存則 $\left(div\,\vec{i} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0\right)$ と矛盾する。

証明：　$div\,(rot\,\vec{H}) = div\,\vec{i} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

となり、左辺 $= 0$、右辺 $\neq 0$ となるため。

(4)

$$rot\,\vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

ととると

$$\begin{aligned} div\,(rot\,\vec{H}) &= div\,(\vec{i} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}) \\ &= \nabla\cdot\vec{i} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

となり矛盾なくまとまる。

(5)

ヘルツの実験で電磁波が検出され確かめられた。

(6)

波動方程式は、

$$\triangle\vec{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

伝播速度:v は、

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{3.374\times10^{-9}} = 3.0\times10^{8} \qquad (m/s)$$

$\boxed{3}$

(1)

$$[q, p] = i\hbar$$

(2)

$$p = -i\hbar\nabla$$

(3)

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1$$

(4)

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

(5)

$$\left[H, a^\dagger\right] = \hbar\omega a^\dagger$$

(6)

$$\begin{aligned} H|n\rangle &= \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \\ &= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} \left[a, a^{\dagger n}\right] &= aa^{\dagger n} - a^{\dagger n} \\ &= aa^\dagger - a^{\dagger n-1}aa^\dagger - a^{\dagger n-1} \\ &= na^{\dagger n-1} \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} \langle n|n\rangle &= \langle 0|a^n\frac{1}{\sqrt{n!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n!}}a^{\dagger n}|0\rangle \\ &= \frac{1}{n!}\langle 0|a^n a^{\dagger n}|0\rangle \\ &= \frac{1}{n!}\langle 0|a^{n-1}a^{\dagger n}a + a^{n-1}a^{\dagger n-1}|0\rangle \\ &= \frac{1}{n!}\langle 0|n!|0\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned} \left[a_j, a_k^\dagger\right] &= \delta_{jk} \\ \left[a_j, a_k\right] &= 0 \\ \left[a_j^\dagger, a_k^\dagger\right] &= 0 \end{aligned}$$

(10)

$$H = \sum_{j=1}^{2} \hbar\omega \left(a_j^\dagger a_j + 1 \right)$$

(11)

$$|n\rangle|m\rangle = \frac{a_j^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} \frac{a_k^{\dagger m}}{\sqrt{m!}} |0\rangle$$

(12)

$$\frac{2n_1 + 1}{2n_2 + 1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

(13)

$$n + 1$$

(14)

$$|n - m\rangle|m\rangle = \frac{a^{\dagger n-m}}{\sqrt{n-m!}} \frac{b^{\dagger m}}{\sqrt{m!}} |0\rangle$$

(15)

$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ を使って計算すると

$$[J^3, J^\pm] = J^\pm, \quad [J^+, J^-] = 2J^3$$

(16)

(15) と同様に

$$[J, J^3] = 0, \quad [J, J^\pm] = 0$$

(17)

$n = 2$ だから三重の縮退が生じ、固有状態は

$$\begin{aligned} |3\rangle &= |0\rangle|2\rangle \\ |2\rangle &= |1\rangle|1\rangle \\ |1\rangle &= |2\rangle|0\rangle \end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned} J^+|3\rangle &= a_1^\dagger a_2 |0\rangle|2\rangle \\ &= |1\rangle|1\rangle = |2\rangle \\ J^+|2\rangle &= a_1^\dagger a_2 |1\rangle|1\rangle \\ &= |2\rangle|0\rangle = |1\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J^+|1\rangle &= a_1^\dagger a_2|0\rangle|2\rangle \\
&= 0 \\
J^-|3\rangle &= a_2^\dagger a_1|0\rangle|2\rangle \\
&= 0 \\
J^-|2\rangle &= a_2^\dagger a_1|1\rangle|1\rangle \\
&= |0\rangle|2\rangle = |3\rangle \\
J^-|1\rangle &= a_2^\dagger a_1|2\rangle|0\rangle \\
&= |1\rangle|1\rangle = |2\rangle
\end{aligned}$$

(19)

$$\begin{aligned}
\rho\left(J\right) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad , \rho\left(J^3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\rho\left(J^+\right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \rho\left(J^-\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$

(1)

１粒子の調和振動子のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p^2}}{2m} + m\omega^2\frac{\vec{q^2}}{2}$$

古典的な粒子の分配関数は１粒子の分配関数を Z_{1c} とすると,$Z_c = Z_{1c}^n$ と表される。

$$\begin{aligned}
Z_{1c} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mathcal{H}}{2kT}} \frac{dp^3dq^3}{h} \\
&= \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\vec{p}^2}{2mkT}} dp^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega^2\vec{q}^2}{2kT}} dq^3 \\
&= \frac{1}{h}\left(\sqrt{2\pi mkT}\sqrt{\frac{2\pi kT}{m\omega}}\right)^3 \\
&= \left(\frac{2\pi kT}{h\omega}\right)^3 \\
&= \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^3
\end{aligned}$$

よって

$$Z_c = \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^{3n}$$

(2)

量子力学的な粒子の分配関数は,

$$Z_q = \sum_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}}$$

であるから、固有値 $(\epsilon\ )$ を代入し計算すると、

$$\begin{aligned}
&= \sum e^{-\hbar\omega\frac{\left(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2}\right)}{kT}} \\
&= e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}\frac{3}{2}\left\{\sum\left(e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^{n_x}\right\}^3
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\sum\left(e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^n &= \left(\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}\right) \\
&= \frac{1}{2sinh\left\{\frac{\hbar\omega}{kT}\right\}}
\end{aligned}$$

であるから、求める分配関数は、

$$Z_q = \left(\frac{1}{2sinh\left\{\frac{\hbar\omega}{kT}\right\}}\right)^{3N}$$

(3)

$h \longrightarrow 0$ のとき、$\hbar \longrightarrow 0$ であるから $sinh$ をテイラー展開すると

$$\begin{aligned} Z_q &\simeq \left(\frac{1}{2\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^{3N} \\ &= Z_c \end{aligned}$$

よって古典的な粒子の分配関数になった!!

(4)

電気磁気モーメントベクトル μ が外部電場 E と傾きの角 θ をなすとき、ポテンシャルエネルギーは

$$u = -E\mu cos\,\theta$$

である。μ がその方向の立体角要素 $d\omega$ の中に見出される確立は、

$$f(\theta)\,d\omega = Ce^{\frac{-u}{kT}}d\omega = C\exp\{E\mu\cos\theta/kT\}\,d\omega$$

よって E の方向の成分 $\mu\,cos\,\theta$ 平均は

$$\begin{aligned} \overline{\mu\cos\theta} &= \mu\int f(\theta)\,d\omega \\ &= \frac{\mu\int\int cos\theta e^{E\mu cos\theta/kT}d\omega}{\int\int e^{E\mu cos\theta/kT}d\omega} \\ &= \frac{\mu\int_0^\pi cos\theta e^{E\mu cos\theta/kT}sin\theta d\theta}{\int_0^\pi e^{E\mu cos\theta}sin\theta d\theta} \\ &= \frac{\mu\int_{-1}^1 \zeta e^{\frac{E\mu}{kT}\zeta}d\zeta}{\int_{-1}^1 e^{\frac{E\mu}{kT}\zeta d\zeta}} \\ &= \mu L\left(\frac{E\mu}{kT}\right) \end{aligned}$$

求めたい分極ベクトル P は単位堆積あたりの N/V 個の分子の平均であるから

$$P = \frac{N}{V}\mu L\left(\frac{E\mu}{kT}\right)$$

(またここで、$L(a) = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \cdots$ をつかった)

$\boxed{5}$

(ア) $\frac{1}{2}mv^2$

(イ) $h\nu$

(ウ) mv

(エ) $\frac{h}{\lambda}$

(オ) ドブロイ波

(カ) ドブロイ波長

(キ) $frachmv$

(ク) $\frac{mc^2}{mv}$

(ケ) v

(コ) $\frac{2\pi a}{n}$

(サ) $\frac{x}{\nu}$

(シ) $px - Et$

(ス) E

(セ) x

(ソ) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$