平成１６年度入試問題解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

問１．物体の加速度を α、張力を T とする。

(a)　質量 m_1、m_2 の物体の運動方程式はそれぞれ

$$m_1\alpha = m_1 g sin\theta_1 - T - \mu_1' m_1 g cos\theta_1 \tag{1}$$

$$m_2\alpha = T - m_2 g sin\theta_2 - \mu_2' m_2 g cos\theta_2 \tag{2}$$

(1)+(2) より

$$(m_1+m_2)\alpha = m_1 g sin\theta_1 - \mu_1' m_1 g cos\theta_1 - m_2 g sin\theta_2 - \mu_2' m_2 g cos\theta_2$$

$$\alpha = \frac{g}{m_1+m_2}[m_1(sin\theta_1 - \mu_1' cos\theta_1) - m_2(sin\theta_2 + \mu_2' cos\theta_2)$$

(b)　物体の張力をそれぞれ S_1、S_2、速度を v とする．質量 m_1、m_2 の物体の運動方程式はそれぞれ

$$m_1\frac{dv}{dt} = m_1 g sin\theta_1 - S_1 - \mu_1' m_1 g cos\theta_1 \tag{3}$$

$$m_2\frac{dv}{dt} = S_2 - m_2 g sin\theta_2 - \mu_2' m_2 g cos\theta_2 \tag{4}$$

滑車の角速度を ω とすると、滑車の運動方程式は

$$I\frac{d\omega}{dt} = S_1 a - S_2 a$$

ここで

$$v = a\omega$$

だから、

$$\frac{Idv}{adt} = S_1 a - S_2 a \tag{5}$$

$(3)\times a + (4)\times a + (5)$ より

$$[(m_1+m_2)a + I]\frac{dv}{dt} = m_1 a g sin\theta_1 - \mu_1' m_1 a g cos\theta_1 - m_2 a g sin\theta_2 - \mu_2' m_2 a g cos\theta_2$$

求める加速度は

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ag}{(m_1+m_2)a+I}[m_1(sin\theta_1 - \mu'_1 cos\theta_1) - m_2(sin\theta_2 + \mu'_2 cos\theta_2)]$$

問２．物体が１から２へ微小距離移動したとする。

$$(ds)^2 = (dr^2) + (rd\theta)^2$$

$$(\frac{ds}{dt})^2 = (\frac{dr}{dt})^2 + (\frac{rd\theta}{dt})^2$$

よって、運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2$$

ラグランジアン L は

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 - U(r)$$

ハミルトニアン H は

$$H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + U(r)$$

ハミルトンの正準変換より

$$P_{\dot{\theta}} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

よって

$$P_\theta = const$$

従って、角運動量保存則が証明された。

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1)

$$V = IR + \frac{Q}{C} \tag{6}$$

これを時間で微分

$$0 = R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{RC}$$

両辺を積分

$$lnI = -\frac{1}{RC}t + A \qquad (A:\text{積分定数})$$

$$I = A'e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad (A' \equiv e^{A}, \quad A':\text{定数}) \tag{7}$$

初期条件 $t = 0$ で $Q = 0$ より、このときの電流を I_0 とすると (6)、(7) より

$$V = I_0 R$$

$$I_0 = A'$$

よって

$$A' = \frac{V}{R}$$

従って

$$I = \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{8}$$

(2)(1) の結果より

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$dQ = \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}dt$$

両辺を積分

$$Q = \frac{V}{R}(-RC)e^{-\frac{1}{RC}t} + A'' \qquad (A'':\text{積分定数}) = -VCe^{-\frac{1}{RC}t} + A''$$

初期条件 $t=0$ で $Q=0$ より

$$0 = -VC + A'', \qquad A'' = VC$$

$$Q = -VCe^{-\frac{1}{RC}t} + VC = VC(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}$$

極板の面積を S とすると

$$S = \pi a^2$$

よって、極板間の電場の大きさは

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{VC(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})}{\pi \epsilon_0 a^2}$$

(3) アンペールマクスウェルの法則より

$$\int_c H \bullet ds = \int_S (i + \frac{\partial D}{\partial t}) \bullet dS$$

ここで、D は電束密度であり、$D = \epsilon_0 E$ また、極板間では電流は流れていないので $i = 0$

$$2\pi r H = \frac{\partial D}{\partial t} \int_S dS = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 E) \cdot \pi r^2 = \pi \epsilon_0 r^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{VC1 - e^{-\frac{1}{RC}t}}{\pi \epsilon_0 a^2} = \frac{r^2 V}{a^2 R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

従って

$$H = \frac{rV}{2\pi a^2 R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

(4)$r = a$ でのポインティングベクトル S の大きさは

$$|S| = |E \times H| = EH = \frac{VC1 - e^{-\frac{1}{RC}t}}{\pi \epsilon_0 a^2} \frac{aV}{2\pi a^2 R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$= -\frac{CV_2}{2\pi \epsilon_0 a^3 R}(e^{-\frac{2}{RC}t} - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

よって単位時間あたりに流入するエネルギーは

$$u(t) = \int |S| dS = -\frac{CV_2}{2\pi \epsilon_0 a^3 R}(e^{-\frac{2}{RC}t} - e^{-\frac{1}{RC}t}) \cdot 2\pi a d$$

$$= -\frac{CV_2 d}{\pi \epsilon_0 a^2 R}(e^{-\frac{2}{RC}t} - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

したがって、時刻までに極板間に入る電磁場のエネルギーの総量は

$$U_1 = \int_0^t u(t')dt' = -\frac{CV_2 d}{\pi\epsilon_0 a^2 R}\int_0^t (e^{-\frac{2}{RC}t'} - e^{-\frac{1}{RC}t'})dt'$$

$$= -\frac{CV_2 d}{\pi\epsilon_0 a^2 R}| -\frac{RC}{2}e^{-\frac{2}{RC}t'} - RCe^{-\frac{1}{RC}t'}|_0^t$$

$$= -\frac{CV_2 d}{\pi\epsilon_0 a^2 R}(-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2}{RC}t} - RCe^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{RC}{2} - RC)$$

$$= \frac{C^2 V_2 d}{2\pi\epsilon_0 a^2 R}(e^{-\frac{2}{RC}t} - 2e^{-\frac{1}{RC}t} + 1) = \frac{C^2 V_2 d}{2\pi\epsilon_0 a^2 R}(e^{-\frac{2}{RC}t-1})^2$$

一方、コンデンサー間の静電容量 C は

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\pi\epsilon_0 a^2}{d}$$

コンデンサーに蓄えられるエネルギーは

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{d}{2\pi\epsilon_0 a^2}VC(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})^2 = \frac{C^2 V_2 d}{2\pi\epsilon_0 a^2}(e^{-\frac{1}{RC}t} - 1)^2$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1)

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x,t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\psi^*(x,t)$$

(2)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial J}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi+\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+(-\frac{\hbar^2}{2m})(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi^*}{\partial^2 x^2}\psi-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x})$$

$$=-\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*+V(x)\psi^*\right)\psi+\psi^*\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi+V(x)\psi\right)+(-\frac{i\hbar}{2m})(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi^*}{\partial^2 x^2}\psi)$$

$$=0$$

(3)

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,t)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\rho}{\partial t}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial J}{\partial x}dx=-(J)_{-\infty}^{\infty}=0$$

$$i\hbar\Phi(x)\frac{\partial T(t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}T(t)\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x^2}+V(x)T(t)\Phi(x)$$

(4) 両辺を $T(t)\Phi(x)$ で割ると

$$i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Phi(x)}\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x^2}+V(x)$$

$T(t)=\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ より

$$i\hbar\frac{1}{\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)}(-\frac{iEt}{\hbar})\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Phi(x)}\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x^2}+V(x)$$

$$\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-V(x)\right)\Phi(x)=0$$

(5)$\Phi(x)$ は時間に依存しないので

$$-\frac{i\hbar}{2m}\left(\Phi^*(x)\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi^*(x)}{\partial x^2}\Phi(x)\right)$$

$$=-\frac{i\hbar}{2m}\left(\Phi^*(x)\frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x)-E\right)\Phi(x)-\frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x)-E^*\right)\Phi^*\Phi(x)\right)=0$$

従って $E=E^*$ よって E は実数

$\boxed{\mathbf{4}}$

(1) 原子 1 個の分配関数は

$$Z_1 = \sum_{J}^{m=-J} e^{\beta g \mu_B m_i H}$$

であり、今系の各々の原子は独立であるから、原子一つ一つの分配関数は (1) の様に書ける。従って、N 原子系の分配関数は

$$Z_N = (Z_1)^N$$

(2)(1) より

$$Z_1 = \sum_{J}^{m=-J} e^{\beta g \mu_B m_i H} = \frac{exp(-\beta g \mu_B H J)\left((exp(\beta g \mu_B H))^{2J+1} - 1\right)}{exp(\beta g \mu_B H) - 1}$$

$$= \frac{e^{\beta g \mu_B H(J+1)} - e^{-\beta g \mu_B H J}}{e^{\beta g \mu_B H} - 1} = \frac{e^{\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2}} - e^{-\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2}}}{e^{\frac{\beta g \mu_B H}{2}} - e^{-\frac{\beta g \mu_B H}{2}}}$$

$$= \frac{sinh(\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2})}{\sinh \frac{\beta g \mu_B H}{2}}$$

$$Z_N = \frac{sinh(\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2})}{\sinh \frac{\beta g \mu_B H}{2}}^N$$

$$< M > = \frac{\partial \ln Z_N}{\partial(\beta h)} = N \frac{\partial}{\partial(\beta h)} \ln \frac{\sinh(\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2})}{\sinh \frac{\beta g \mu_B H}{2}}$$

$$= N \left(\frac{\frac{2J+1}{2} g \mu_B \cosh\left(\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2}\right)}{\sinh\left(\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2}\right)} - \frac{\frac{1}{2} g \mu_B \cosh\left(\frac{1}{2}\beta g \mu_B H\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}\beta g \mu_B H\right)} \right)$$

$$= \frac{g \mu_B N}{2} (2J+1) \coth \frac{(2J+1)\beta g \mu_B H}{2} - \coth \frac{\beta g \mu_B H}{2}$$

(3)(2) より

$$< M > = g \mu_B N J \left(\frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J} \beta g \mu_B H J\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{1}{2J} \beta g \mu_B H J\right) \right)$$

今、系は高温であるので $\beta \ll 1$ である。ここで

$$\coth x \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \qquad (x \ll 1)$$

の近似を適用すれば

$$< M >$$

$$\sim g\mu_B NJ \left(\frac{2J+1}{2J} \left(\frac{1}{\beta g\mu_B HJ\frac{2J+1}{2J}} + \frac{1}{3}\frac{2J+1}{2J}\beta g\mu_B HJ \right) - \frac{1}{2J} \left(\frac{1}{\beta g\mu_B HJ\frac{1}{2J}} + \frac{1}{3}\frac{1}{2J}\beta g\mu_B HJ \right) \right)$$

$$= g\mu_B NJ \left(\frac{1}{\beta g\mu_B HJ} + \frac{1}{3}\left(\frac{2J+1}{2J}\right)^2 \beta g\mu_B HJ - \frac{1}{\beta g\mu_B HJ} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2J}\right)^2 \beta g\mu_B HJ \right)$$

$$= \frac{1}{3}\beta g^2 \mu_B^2 NHJ^2 \left(\left(\frac{2J+1}{2J}\right)^2 - \left(\frac{1}{2J}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{3}\beta g^2 \mu_B^2 NHJ^2 \frac{4J^2+4J}{4J^2} = \frac{1}{3}\beta g^2 \mu_B^2 NHJ\,(J+1)$$

$$\chi = \left(\frac{\partial < M >}{\partial H}\right)_T = \frac{1}{3}\beta g^2 \mu_B NJ\,(J+1) = \frac{g^2 \mu_B NJ\,(J+1)}{3k_B T}$$

よって、x は $\frac{1}{3}$ に比例し、比例定数は $fracg^2\mu_B NJ\,(J+1)3k_B$ (4) 古典的極限を取ると

$$frac2J+12J \stackrel{J\to\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \frac{1}{2J} \stackrel{J\to\infty}{\longrightarrow} 0 \beta g\mu_B HJ \stackrel{g\mu_B J\to\mu_0}{\longrightarrow} \beta\mu_B H$$

よって

$$\coth\left(\frac{2J+1}{2J}\beta g\mu_B HJ\right) \to \coth\left(\beta g\mu_0\right)$$

また

$$coth(\beta g\mu_B HJ\frac{1}{2J}) = coth\frac{\beta g\mu_B H}{2} = \frac{cosh\frac{\beta g\mu_B H}{2}}{sinh\frac{\beta g\mu_B H}{2}}$$

分母と分子をそれぞれ１次までマクローリン展開すると

$$coth(\beta g\mu_B HJ\frac{1}{2J}) \sim \frac{1+0}{0+\frac{\beta g\mu_B H}{2}} = \frac{2}{\beta g\mu_B H}$$

$$\frac{1}{2J}coth(\beta g\mu_B HJ\frac{1}{2J}) \sim \frac{1}{2J}\frac{2}{\beta g\mu_B H} \to \frac{1}{\beta\mu_B H}$$

$$< M >= \mu_0 N(coth(\beta g\mu_0 H) - \frac{1}{\beta\mu_0 H}) = \mu_0 N(coth\frac{\mu_0 H)}{k_b T} - \frac{k_b T}{\mu_0 H})$$

(5)

$$U = -\frac{\partial ln Z_N}{\partial\beta} = -\frac{\partial(\beta H)}{\beta}\frac{\partial ln Z_N}{\partial(\beta H)}$$

$$= -H < M >= -\frac{\beta g\mu_B NH}{2}\left((2J+1)coth\frac{(2J+1)\beta g\mu_B H}{2} - coth(\frac{\beta g\mu_B H}{2}\right)$$

$$C_H = (\frac{\partial U}{\partial T})_H = \frac{\partial\beta}{\partial T}\frac{\partial U}{\partial\beta}$$

$$= -\frac{1}{k_B T^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left((2J+1)\frac{-g\mu_B NH}{2}coth(\beta g\mu_B H\frac{2J+1}{2}) - coth\frac{\beta g\mu_B H}{2}\right)$$

$$= \frac{g\mu_B NH}{2k_B T^2}\left((2J+1)\frac{-g\mu_B H\frac{2J+1}{2}}{sinh^2(\beta g\mu_B H\frac{2J+1}{2})} - \frac{-\frac{g\mu_B H}{2}}{sinh^2\frac{\beta g\mu_B H}{2}}\right)$$

$$= \frac{N}{k_B}(\frac{g\mu_B H}{2T})^2\left(\frac{1}{sinh^2(\frac{\beta g\mu_B H}{2})} - \frac{(2J+1)^2}{sinh^2(\frac{(2J+1)\beta g\mu_B H}{2})}\right)$$

$\boxed{\mathbf{5}}$

(1)ν と $\nu+d\nu$ の間に、その振動数をもつところの固有振動の数を $Z(\nu)d\nu$ とする。長さ L の弦で、節の数 0 のとき、$\lambda=2L$,$\nu=\frac{c}{2L}$ 1 のとき、$\lambda=\frac{2L}{2}$,$\nu=\frac{2c}{2L}=\frac{c}{L}$ 2 のとき、$\lambda=\frac{2L}{3}$,$\nu=\frac{3c}{2L}$ 波長 $\frac{2L}{s}$ のとき、固有振動は $(s-1)$ 個の節を持っている．弾性波が弦上を速さ c で伝わるとすると、振動数は、

$$\nu_s=\frac{sc}{2L} \qquad\qquad s=1,2,\cdots$$

弦の固有振動の振動数は $\triangle=\frac{c}{2L}$ の間隔をもって等間隔に並んでいるので、ν と $\nu+d\nu$ の範囲内には、

$$Z(\nu)d\nu=\frac{d\nu}{\triangle}=\frac{2L}{c}d\nu$$

3 次元では

$$\nu=\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}\frac{c}{2L}$$

xyz 空間の点

$$x=\frac{c}{2L}s_x, \qquad y=\frac{c}{2L}s_y \qquad z=\frac{c}{2L}s_z$$

を考える．s_x,s_y,s_z は整数だからこれらの点は $(\frac{c}{2L})^3$ の体積の空間碁盤目の上にくる。原点からこの点までの距離は、

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}\frac{c}{2L}$$

半径 ν と $\nu+d\nu$ の 2 球ではさまれた空間内の碁盤目の個数は、はさまれた空間の体積 $\frac{4\pi\nu^2d\nu}{8}$ より

$$Z(\nu)d\nu=\frac{\pi\nu^2d\nu}{2\triangle^3}=\frac{4\pi L^3}{c^3}\nu^2d\nu \qquad (*)$$

同一の s_x,s_y,s_z を有する振動が 2 種ずつ存在するので、光の $Z(\nu)$ は（＊）の 2 倍になる．

$$Z(\nu)d\nu=\frac{8\pi L^3}{c^3}\nu^2d\nu$$

$\nu=\frac{c}{\lambda}$ より、$d\nu=-\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$ これを代入し、

$$P_\lambda=\frac{8\pi L^3}{c^3}\frac{c^2}{\lambda^2}(-\frac{c}{\lambda^2}d\lambda)=\frac{8\pi L^3}{\lambda^4}d\lambda$$

(3)

$$W=\prod_\lambda w_\lambda=\prod_\lambda\frac{N_\lambda+P_\lambda-1}{N!(P_\lambda-1)!} \qquad (9)$$

スターリングの公式 $logN! \approx NlogN - N$ (9) の両辺の log をとって

$$logW = \sum_{\lambda}[(N_\lambda + P_\lambda - 1)log(N_\lambda + P_\lambda - 1) - N_\lambda logN_\lambda - (P_\lambda - 1)log(P_\lambda - 1)] \quad (10)$$

N_λ の変分をとって