

# 平成16年度入試問題解答例

**1**

問1. 物体の加速度を  $\alpha$ 、張力を  $T$  とする。

(a) 質量  $m_1$ 、 $m_2$  の物体の運動方程式はそれぞれ

$$m_1\alpha = m_1g\sin\theta_1 - T - \mu'_1m_1g\cos\theta_1 \quad (1)$$

$$m_2\alpha = T - m_2g\sin\theta_2 - \mu'_2m_2g\cos\theta_2 \quad (2)$$

(1)+(2) より

$$(m_1 + m_2)\alpha = m_1g\sin\theta_1 - \mu'_1m_1g\cos\theta_1 - m_2g\sin\theta_2 - \mu'_2m_2g\cos\theta_2$$

$$\alpha = \frac{g}{m_1 + m_2} [m_1(\sin\theta_1 - \mu'_1\cos\theta_1) - m_2(\sin\theta_2 + \mu'_2\cos\theta_2)]$$

(b) 物体の張力をそれぞれ  $S_1$ 、 $S_2$ 、速度を  $v$  とする。質量  $m_1$ 、 $m_2$  の物体の運動方程式はそれぞれ

$$m_1\frac{dv}{dt} = m_1g\sin\theta_1 - S_1 - \mu'_1m_1g\cos\theta_1 \quad (3)$$

$$m_2\frac{dv}{dt} = S_2 - m_2g\sin\theta_2 - \mu'_2m_2g\cos\theta_2 \quad (4)$$

滑車の角速度を  $\omega$  とすると、滑車の運動方程式は

$$I\frac{d\omega}{dt} = S_1a - S_2a$$

ここで

$$v = a\omega$$

だから、

$$\frac{I}{a}\frac{dv}{dt} = S_1a - S_2a \quad (5)$$

(3)  $\times a$  + (4)  $\times a$  + (5) より

$$[(m_1 + m_2)a + I]\frac{dv}{dt} = m_1ags\sin\theta_1 - \mu'_1m_1ag\cos\theta_1 - m_2ags\sin\theta_2 - \mu'_2m_2ag\cos\theta_2$$

求める加速度は

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ag}{(m_1 + m_2)a + I} [m_1(\sin\theta_1 - \mu'_1 \cos\theta_1) - m_2(\sin\theta_2 + \mu'_2 \cos\theta_2)]$$

問2. 物体が1から2へ微小距離移動したとする。

$$(ds)^2 = (dr^2) + (rd\theta)^2$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{rd\theta}{dt}\right)^2$$

よって、運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2$$

ラグランジアン  $L$  は

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 - U(r)$$

ハミルトニアン  $H$  は

$$H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + U(r)$$

ハミルトンの正準変換より

$$P_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

よって

$$P_\theta = \text{const}$$

従って、角運動量保存則が証明された。

## 2

(1)

$$V = IR + \frac{Q}{C} \quad (6)$$

これを時間で微分

$$0 = R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{RC}$$

両辺を積分

$$\ln I = -\frac{1}{RC}t + A \quad (A : \text{積分定数})$$

$$I = A'e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (A' \equiv e^A, \quad A' : \text{定数}) \quad (7)$$

初期条件  $t = 0$  で  $Q = 0$  より、このときの電流を  $I_0$  とすると (6)、(7) より

$$V = I_0 R$$

$$I_0 = A'$$

よって

$$A' = \frac{V}{R}$$

従って

$$I = \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (8)$$

(2)(1) の結果より

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$dQ = \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} dt$$

両辺を積分

$$Q = \frac{V}{R} (-RC) e^{-\frac{1}{RC}t} + A'' \quad (A'' : \text{積分定数}) = -VC e^{-\frac{1}{RC}t} + A''$$

初期条件  $t = 0$  で  $Q = 0$  より

$$0 = -VC + A'', \quad A'' = VC$$

$$Q = -VCe^{-\frac{1}{RC}t} + VC = VC(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

極板の面積を  $S$  とすると

$$S = \pi a^2$$

よって、極板間の電場の大きさは

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{VC(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})}{\pi \epsilon_0 a^2}$$

(3) アンペールマクスウェルの法則より

$$\int_c H \cdot ds = \int_S (i + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dS$$

ここで、 $D$  は電束密度であり、 $D = \epsilon_0 E$  また、極板間では電流は流れていないので  $i = 0$

$$2\pi r H = \frac{\partial D}{\partial t} \int_S dS = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 E) \cdot \pi r^2 = \pi \epsilon_0 r^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{VC(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})}{\pi \epsilon_0 a^2} = \frac{r^2 V}{a^2 R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

従って

$$H = \frac{rV}{2\pi a^2 R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

(4)  $r = a$  でのポインティングベクトル  $S$  の大きさは

$$\begin{aligned} |S| &= |E \times H| = EH = \frac{VC(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})}{\pi \epsilon_0 a^2} \frac{aV}{2\pi a^2 R} e^{-\frac{1}{RC}t} \\ &= -\frac{CV_2}{2\pi \epsilon_0 a^3 R} (e^{-\frac{2}{RC}t} - e^{-\frac{1}{RC}t}) \end{aligned}$$

よって単位時間あたりに流入するエネルギーは

$$\begin{aligned} u(t) &= \int |S| dS = -\frac{CV_2}{2\pi \epsilon_0 a^3 R} (e^{-\frac{2}{RC}t} - e^{-\frac{1}{RC}t}) \cdot 2\pi ad \\ &= -\frac{CV_2 d}{\pi \epsilon_0 a^2 R} (e^{-\frac{2}{RC}t} - e^{-\frac{1}{RC}t}) \end{aligned}$$

したがって、時刻までに極板間に入る電磁場のエネルギーの総量は

$$\begin{aligned}U_1 &= \int_0^t u(t') dt' = -\frac{CV_2d}{\pi\epsilon_0a^2R} \int_0^t (e^{-\frac{2}{RC}t'} - e^{-\frac{1}{RC}t'}) dt' \\&= -\frac{CV_2d}{\pi\epsilon_0a^2R} \left[ -\frac{RC}{2} e^{-\frac{2}{RC}t'} - RC e^{-\frac{1}{RC}t'} \right]_0^t \\&= -\frac{CV_2d}{\pi\epsilon_0a^2R} \left( -\frac{RC}{2} e^{-\frac{2}{RC}t} - RC e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{RC}{2} - RC \right) \\&= \frac{C^2V_2d}{2\pi\epsilon_0a^2R} (e^{-\frac{2}{RC}t} - 2e^{-\frac{1}{RC}t} + 1) = \frac{C^2V_2d}{2\pi\epsilon_0a^2R} (e^{-\frac{2}{RC}t-1})^2\end{aligned}$$

一方、コンデンサー間の静電容量  $C$  は

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\pi\epsilon_0a^2}{d}$$

コンデンサーに蓄えられるエネルギーは

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{d}{2\pi\epsilon_0a^2} VC (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})^2 = \frac{C^2V_2d}{2\pi\epsilon_0a^2} (e^{-\frac{1}{RC}t} - 1)^2$$

### 3

(1)

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(x, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi^*(x, t)$$

(2)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \right) \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi^* + V(x) \psi^* \right) \psi + \psi^* \frac{1}{i\hbar} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V(x) \psi \right) + \left( -\frac{i\hbar}{2m} \right) \left( \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(3)

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial J}{\partial x} dx = -(J)_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$i\hbar \Phi(x) \frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} T(t) \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} + V(x) T(t) \Phi(x)$$

(4) 両辺を  $T(t)\Phi(x)$  で割ると

$$i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\Phi(x)} \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} + V(x)$$

$T(t) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$  より

$$i\hbar \frac{1}{\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)} \left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\Phi(x)} \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} + V(x)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \Phi(x) = 0$$

(5)  $\Phi(x)$  は時間に依存しないので

$$-\frac{i\hbar}{2m} \left( \Phi^*(x) \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi^*(x)}{\partial x^2} \Phi(x) \right)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} \left( \Phi^*(x) \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \Phi(x) - \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E^*) \Phi^* \Phi(x) \right) = 0$$

従って  $E = E^*$  よって  $E$  は実数

# 4

(1) 原子 1 個の分配関数は

$$Z_1 = \sum_J^{m=-J} e^{\beta g \mu_B m_i H}$$

であり、今系の各々の原子は独立であるから、原子一つ一つの分配関数は (1) の様に書ける。従って、 $N$  原子系の分配関数は

$$Z_N = (Z_1)^N$$

(2)(1) より

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_J^{m=-J} e^{\beta g \mu_B m_i H} = \frac{\exp(-\beta g \mu_B H J) \left( (\exp(\beta g \mu_B H))^{2J+1} - 1 \right)}{\exp(\beta g \mu_B H) - 1} \\ &= \frac{e^{\beta g \mu_B H(J+1)} - e^{-\beta g \mu_B H J}}{e^{\beta g \mu_B H} - 1} = \frac{e^{\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2}} - e^{-\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2}}}{e^{\frac{\beta g \mu_B H}{2}} - e^{-\frac{\beta g \mu_B H}{2}}} \\ &= \frac{\sinh(\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2})}{\sinh \frac{\beta g \mu_B H}{2}} \\ Z_N &= \frac{\sinh(\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2})^N}{\sinh \frac{\beta g \mu_B H}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= \frac{\partial \ln Z_N}{\partial(\beta h)} = N \frac{\partial}{\partial(\beta h)} \ln \frac{\sinh(\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2})}{\sinh \frac{\beta g \mu_B H}{2}} \\ &= N \left( \frac{\frac{2J+1}{2} g \mu_B \cosh(\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2})}{\sinh(\beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2})} - \frac{\frac{1}{2} g \mu_B \cosh(\frac{1}{2} \beta g \mu_B H)}{\sinh(\frac{1}{2} \beta g \mu_B H)} \right) \\ &= \frac{g \mu_B N}{2} (2J+1) \coth \frac{(2J+1) \beta g \mu_B H}{2} - \coth \frac{\beta g \mu_B H}{2} \end{aligned}$$

(3)(2) より

$$\langle M \rangle = g \mu_B N J \left( \frac{2J+1}{2J} \coth \left( \frac{2J+1}{2J} \beta g \mu_B H J \right) - \frac{1}{2J} \coth \left( \frac{1}{2J} \beta g \mu_B H J \right) \right)$$

今、系は高温であるので  $\beta \ll 1$  である。ここで

$$\coth x \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \quad (x \ll 1)$$

の近似を適用すれば

$$\begin{aligned} & \langle M \rangle \\ & \sim g\mu_B N J \left( \frac{2J+1}{2J} \left( \frac{1}{\beta g\mu_B H J \frac{2J+1}{2J}} + \frac{1}{3} \frac{2J+1}{2J} \beta g\mu_B H J \right) - \frac{1}{2J} \left( \frac{1}{\beta g\mu_B H J \frac{1}{2J}} + \frac{1}{3} \frac{1}{2J} \beta g\mu_B H J \right) \right) \\ & = g\mu_B N J \left( \frac{1}{\beta g\mu_B H J} + \frac{1}{3} \left( \frac{2J+1}{2J} \right)^2 \beta g\mu_B H J - \frac{1}{\beta g\mu_B H J} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2J} \right)^2 \beta g\mu_B H J \right) \\ & = \frac{1}{3} \beta g^2 \mu_B^2 N H J^2 \left( \left( \frac{2J+1}{2J} \right)^2 - \left( \frac{1}{2J} \right) \right) \\ & = \frac{1}{3} \beta g^2 \mu_B^2 N H J^2 \frac{4J^2 + 4J}{4J^2} = \frac{1}{3} \beta g^2 \mu_B^2 N H J (J+1) \end{aligned}$$

$$\chi = \left( \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial H} \right)_T = \frac{1}{3} \beta g^2 \mu_B N J (J+1) = \frac{g^2 \mu_B N J (J+1)}{3k_B T}$$

よって、 $x$  は  $\frac{1}{3}$  に比例し、比例定数は  $\frac{1}{3} \beta g^2 \mu_B N J (J+1) 3k_B$  (4) 古典的極限を取ると

$$\frac{2J+12J}{2J} \xrightarrow{J \rightarrow \infty} 1, \quad \frac{1}{2J} \xrightarrow{J \rightarrow \infty} 0, \quad \beta g\mu_B H J \xrightarrow{g\mu_B J \rightarrow \mu_0} \beta \mu_B H$$

よって

$$\coth \left( \frac{2J+1}{2J} \beta g\mu_B H J \right) \rightarrow \coth(\beta g\mu_0)$$

また

$$\coth\left(\beta g\mu_B H J \frac{1}{2J}\right) = \coth \frac{\beta g\mu_B H}{2} = \frac{\cosh \frac{\beta g\mu_B H}{2}}{\sinh \frac{\beta g\mu_B H}{2}}$$

分母と分子をそれぞれ1次までマクローリン展開すると

$$\coth\left(\beta g\mu_B H J \frac{1}{2J}\right) \sim \frac{1+0}{0 + \frac{\beta g\mu_B H}{2}} = \frac{2}{\beta g\mu_B H}$$

$$\frac{1}{2J} \coth\left(\beta g\mu_B H J \frac{1}{2J}\right) \sim \frac{1}{2J} \frac{2}{\beta g\mu_B H} \rightarrow \frac{1}{\beta \mu_B H}$$



$$\langle M \rangle = \mu_0 N \left( \coth(\beta g \mu_0 H) - \frac{1}{\beta \mu_0 H} \right) = \mu_0 N \left( \coth \frac{\mu_0 H}{k_b T} - \frac{k_b T}{\mu_0 H} \right)$$

(5)

$$U = -\frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta} = -\frac{\partial(\beta H)}{\beta} \frac{\partial \ln Z_N}{\partial(\beta H)}$$

$$= -H \langle M \rangle = -\frac{\beta g \mu_B N H}{2} \left( (2J+1) \coth \frac{(2J+1) \beta g \mu_B H}{2} - \coth \left( \frac{\beta g \mu_B H}{2} \right) \right)$$

$$C_H = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_H = \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial U}{\partial \beta}$$

$$= -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( (2J+1) \frac{-g \mu_B N H}{2} \coth \left( \beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2} \right) - \coth \frac{\beta g \mu_B H}{2} \right)$$

$$= \frac{g \mu_B N H}{2 k_B T^2} \left( (2J+1) \frac{-g \mu_B H \frac{2J+1}{2}}{\sinh^2 \left( \beta g \mu_B H \frac{2J+1}{2} \right)} - \frac{-\frac{g \mu_B H}{2}}{\sinh^2 \frac{\beta g \mu_B H}{2}} \right)$$

$$= \frac{N}{k_B} \left( \frac{g \mu_B H}{2 T} \right)^2 \left( \frac{1}{\sinh^2 \left( \frac{\beta g \mu_B H}{2} \right)} - \frac{(2J+1)^2}{\sinh^2 \left( \frac{(2J+1) \beta g \mu_B H}{2} \right)} \right)$$

# 5

(1)  $\nu$  と  $\nu + d\nu$  の間に、その振動数をもつところの固有振動の数を  $Z(\nu)d\nu$  とする。長さ  $L$  の弦で、節の数 0 のとき、 $\lambda = 2L, \nu = \frac{c}{2L}$  のとき、 $\lambda = \frac{2L}{2}, \nu = \frac{2c}{2L} = \frac{c}{L}$  のとき、 $\lambda = \frac{2L}{3}, \nu = \frac{3c}{2L}$  波長  $\frac{2L}{s}$  のとき、固有振動は  $(s-1)$  個の節を持っている。弾性波が弦上を速さ  $c$  で伝わるとすると、振動数は、

$$\nu_s = \frac{sc}{2L} \quad s = 1, 2, \dots$$

弦の固有振動の振動数は  $\Delta = \frac{c}{2L}$  の間隔をもって等間隔に並んでいるので、 $\nu$  と  $\nu + d\nu$  の範囲内には、

$$Z(\nu)d\nu = \frac{d\nu}{\Delta} = \frac{2L}{c}d\nu$$

3次元では

$$\nu = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} \frac{c}{2L}$$

$xyz$  空間の点

$$x = \frac{c}{2L}s_x, \quad y = \frac{c}{2L}s_y, \quad z = \frac{c}{2L}s_z$$

を考える。 $s_x, s_y, s_z$  は整数だからこれらの点は  $(\frac{c}{2L})^3$  の体積の空間碁盤目の上にくる。原点からこの点までの距離は、

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} \frac{c}{2L}$$

半径  $\nu$  と  $\nu + d\nu$  の2球ではさまれた空間内の碁盤目の個数は、はさまれた空間の体積  $\frac{4\pi\nu^2 d\nu}{8}$  より

$$Z(\nu)d\nu = \frac{\pi\nu^2 d\nu}{2\Delta^3} = \frac{4\pi L^3}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (*)$$

同一の  $s_x, s_y, s_z$  を有する振動が2種ずつ存在するので、光の  $Z(\nu)$  は  $(*)$  の2倍になる。

$$Z(\nu)d\nu = \frac{8\pi L^3}{c^3} \nu^2 d\nu$$

$\nu = \frac{c}{\lambda}$  より、 $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$  これを代入し、

$$P_\lambda = \frac{8\pi L^3 c^2}{c^3 \lambda^2} \left(-\frac{c}{\lambda^2} d\lambda\right) = \frac{8\pi L^3}{\lambda^4} d\lambda$$

(3)

$$W = \prod_\lambda w_\lambda = \prod_\lambda \frac{N_\lambda + P_\lambda - 1}{N!(P_\lambda - 1)!} \quad (9)$$

スターリングの公式  $\log N! \approx N \log N - N$  (9) の両辺の  $\log$  をとって

$$\log W = \sum_{\lambda} [(N_{\lambda} + P_{\lambda} - 1) \log(N_{\lambda} + P_{\lambda} - 1) - N_{\lambda} \log N_{\lambda} - (P_{\lambda} - 1) \log(P_{\lambda} - 1)] \quad (10)$$

$N_{\lambda}$  の変分をとって