平成12年度(1次募集)
問題解答

石神真慈

平成17年11月15日
(チェックした人：川口賢二)

1

(A)

問 1

$$f = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{a}{x^2} - \frac{2b}{x^3} \tag{1.1}$$

つり合いの位置 x_1 は

$$x_1 = \frac{2b}{a} \tag{1.2}$$

問 2

運動エネルギーを T とすると、ラグランジアン L は

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{a}{x} - \frac{2b}{x^2} \tag{1.3}$$

ここでオイラー・ラグランジの微分方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{1.4}$$

を用いると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{a}{x^2} - \frac{2b}{x^3}$$

よって運動方程式は

$$m\ddot{x} = \frac{a}{x^2} - \frac{2b}{x^3} \tag{1.5}$$

問 3

x_1 近くで働く力 F は U の高次導関数を U',U'',$\cdots$とすると

$$F = -U' = -(U')_{x=x_0} - (U'')_{x=x_0}(x - x_0) - \frac{1}{2}(U''')_{x=x_0}(x - x_0)^2 - \cdots \tag{1.6}$$

となり、質点の微小運動を考えているので $(x - x_0)^2, (x - x_0)^3,\cdots$を無視し

$$F = -\frac{a^4}{8b^3}(x - x_0) \tag{1.7}$$

運動方程式は

$$m\ddot{x} = -\frac{a^4}{8b^3}(x - x_0) \tag{1.8}$$

よって振動数を ω として周期 T を求めると

$$\omega = \frac{a^2}{\sqrt{8mb^3}} \tag{1.9}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4b\pi\sqrt{2bm}}{a^2} \tag{1.10}$$

問 4
全力学的エネルギーを E とすると、運動は $E \geq U$ の範囲で起こり、つり合いの位置における力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + U(\frac{a}{2b}) = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{a^2}{4b} \tag{1.11}$$

ある位置における力学的エネルギー E' は, 速度 v' として

$$E' = \frac{1}{2}m{v'}^2 + U(x) \tag{1.12}$$

x →∞で U(x)=0 だから

$$E = E' \geq 0 \tag{1.13}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{a^2}{4b} \geq 0 \tag{1.14}$$

$$\therefore \quad v_0 \geq \sqrt{\frac{a^2}{2mb}} \tag{1.15}$$

$\boxed{2}$

$$E(t) = L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri \tag{2.1}$$
$$q(t) = A\cos(\omega t - \phi) \tag{2.2}$$

$\frac{dq}{di} = i$ だから

$$\begin{aligned} E(t) &= L\frac{d^2}{dt^2} + \frac{q}{c} + R\frac{dq}{dt} \\ V_0\cos(\omega t) &= L - \omega^2 LA\cos(\omega t - \phi) + \frac{A}{C}\cos(\omega t - \phi) - \omega RA\sin(\omega t - \phi) \end{aligned}$$

$\omega t = \frac{\pi}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= -\omega^2 AL\cos(\frac{\pi}{2} - \phi) + \frac{A}{C}\cos(\frac{\pi}{2} - \phi) - \omega RA\sin(\frac{\pi}{2} - \phi) \\ &= A/(-\omega^2 L + \frac{1}{c})\sin\phi - \omega R\cos\phi/ \end{aligned} \tag{2.3}$$

$A \neq 0$ なので

$$0 = (-\omega^2 L + \frac{1}{C})\sin\phi - \omega R\cos\phi$$
$$\tan\phi = \frac{\omega R}{-\omega^2 L + \frac{1}{C}}$$
$$\therefore \phi = \tan^{-1}\frac{\omega R}{-\omega^2 L + \frac{1}{C}} \tag{2.4}$$

次に t = 0 のとき

$$\begin{aligned} V_0 &= -\omega^2 AL\cos(-\phi) + \frac{A}{C}\cos\phi - \omega RA\sin(-\phi) \\ &= A(-\omega^2 AL\cos\phi + \frac{1}{C}\cos\phi + \omega R\sin\phi \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\therefore A = \frac{V_0}{(\omega^2 L + \frac{1}{C})\cos\phi + \omega R\sin\phi} \tag{2.6}$$

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} \\
&= -A\sin(\omega t-\phi) \\
&= -\frac{V_0\omega\sin(\omega t-\phi)}{(-\omega^2 L+\frac{1}{C})\cos\phi+\omega R\sin\phi} \qquad (2.7)\\
Z(\omega) &= \sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})} \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

(b) エネルギー密度 u は

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}, \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}, \mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$$

と Maxwell 方程式より

$$
\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})dv \\
&= -\frac{1}{2}\int_V(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{D}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t})dv \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

上式の被積分関数の第一項と第二項、第三項と第四項は等しいので

$$u=-\int_V(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t})dv \qquad (2.10)$$

を得る。Maxwell 方程式をこの式に代入すると、

$$u=\int_V\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}dv+\int_V(-\mathbf{E}\cdot rot\mathbf{H}+\mathbf{H}\cdot rot\mathbf{E})dv \qquad (2.11)$$

となる。$div(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=-\mathbf{E}\cdot rot\mathbf{H}+\mathbf{H}\cdot rot\mathbf{E}$、およびガウスの定理から

$$u=\int_V\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}dv+\oint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H})d\mathbf{S} \qquad (2.12)$$

が得られる。$d\mathbf{S}$ は体積 V を囲む閉曲面の外向き面素ベクトルである。

$\boxed{3}$

1.

$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]$ を計算すると

$$\begin{aligned}[\hat{a},\hat{a}^{\dagger]} &= \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} \qquad (3.1)\\ &= \frac{m\omega}{2\hbar}(\hat{q}+\frac{i\hat{p}}{m\omega})(\hat{q}-\frac{i\hat{p}}{m\omega}) - \frac{m\omega}{2\hbar}(\hat{q}-\frac{i\hat{p}}{m\omega})(\hat{q}+\frac{i\hat{p}}{m\omega})\\ &= -\frac{i}{\hbar}[\hat{q},\hat{p}]\\ &= 1 \qquad (3.2)\end{aligned}$$

つぎに $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ を計算すると

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger\hat{a} &= \frac{m\omega}{2\hbar}(\hat{q}-\frac{i\hat{p}}{m\omega})(\hat{q}+\frac{i\hat{p}}{m\omega}) \qquad (3.3)\\ &= \frac{1}{\omega\hbar}(\frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2+\frac{1}{2m}\hat{p}^2-\frac{\hbar\omega}{2})\end{aligned}$$

一次元調和振動子のハミルトニアン $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 \qquad (3.4)$$

だから (3。6) は

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{\hbar\omega}(\hat{H}-\frac{\hbar\omega}{2}) \qquad (3.5)$$

$$\therefore \quad \hat{H} = \hbar\omega(\hat{N}+\frac{1}{2}) \qquad (3.6)$$

2.

$$\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle &= \frac{1}{n!}\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \qquad (3.7)\\ \hat{a}(\hat{a}^\dagger)^n &= \hat{a}\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger)^{n-1}\\ &= (1+\hat{a}^\dagger\hat{a})(\hat{a}^\dagger)^{n-1}\\ &= (\hat{a}^\dagger)^{n-1}+\hat{a}^\dagger(1+\hat{a}^\dagger\hat{a})(\hat{a}^\dagger)^{n-2}\\ &= \cdots = n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}+(\hat{a}^\dagger)^n\hat{a} \qquad (3.8)\end{aligned}$$

よって (3.8) は

$$\hat{a}|n\rangle = \frac{n}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle + \frac{1}{n!}(\hat{a}^\dagger)^n\hat{a}|0\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{n}\frac{1}{(n-1)!}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle \\
&= \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

次に $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ を示す。

$$
\begin{aligned}
\hat{a}^\dagger|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \\
&= \sqrt{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n+1}|0\rangle \\
&= \sqrt{(n+1)!ac1\sqrt{(n+1)!}}(\hat{a}^\dagger)^{n+1}|0\rangle \\
&= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

さらに、$|n\rangle$ が H の固有値 E_n の固有状態であることを示す。

$$
\begin{aligned}
\hat{H}|n\rangle &= \hbar\omega(\hat{N}+\frac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{N!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \\
&= \hbar\omega\frac{n}{\sqrt{N!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle + \hbar\omega\frac{1}{\sqrt{N!}}(\hat{a})^n|0\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{N!}} \\
&= \hbar\omega(n+\frac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{N!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \\
&= \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle \\
&= E_n|n\rangle \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

3.
粒子数の期待値 $\langle N\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
\langle N\rangle &= \langle\alpha|N|\alpha\rangle \\
&= |\alpha|^2\langle\alpha|\alpha\rangle \\
&= |\alpha|^2 \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

次に $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ を示す。

$$
\begin{aligned}
\hat{a}|\alpha\rangle &= exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}|n-1\rangle \\
&= \alpha exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1!)}}|n-1\rangle
\end{aligned}
$$

n-1=n とみて

$$
\begin{aligned}
&= \alpha exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{N!}}|n\rangle \\
&= \alpha|\alpha\rangle \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
P_n &= |\langle n|\alpha\rangle|^2 \\
&= |\langle n|exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}|m\rangle|^2 \\
&= |exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\langle n|m\rangle|^2 \\
&= exp(-|\alpha|^2)\frac{\alpha^2}{n!} \\
&= exp(-\langle N\rangle)\frac{\langle N\rangle^n}{n!} \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

5.

(a)

$$\langle\alpha|\hat{q}|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) \qquad (3.15)$$

(b)

$$\langle\alpha|\hat{p}|\rangle = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\alpha+\alpha^*) \qquad (3.16)$$

(c)

$$\langle\alpha|\hat{q}^2|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}[(\alpha+\alpha^*)^2+1] \qquad (3.17)$$

(d)

$$\langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}[(\alpha-\alpha^*)^2-1] \qquad (3.18)$$

(e)

$$\Delta q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \qquad (3.19)$$

(f)

$$\Delta q = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \qquad (3.20)$$

4

(1)

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...) \tag{4.1}$$

(2) $\beta = \frac{1}{kT}$ として　　　(k:ボルツマン定数)

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{n=0} \exp(-\beta(n + \frac{1}{2})\hbar\omega)) \\ &= \frac{\exp(-\frac{\beta\hbar\omega}{2})}{1 - \exp(-\beta\hbar\omega)} \end{aligned} \tag{4.2}$$

(3) 結晶のエネルギーは、アボガドロ定数を N_A として

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z \\ &= \frac{3}{2} N_A \hbar\omega + \frac{3N_A\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \end{aligned} \tag{4.3}$$

(4) 比熱は

$$c = \frac{\partial U}{\partial T}$$

高音 ($\beta\hbar\omega \to 0$) では

$$\exp(\beta\hbar\omega) - 1 \simeq \beta\hbar\omega$$

としてよいから

$$c \to 3N_A k \tag{4.4}$$

低温 ($\beta\hbar\omega \gg 1$) では

$$c \to 3N_A k(\beta\hbar\omega)^2 \exp(-\beta\hbar\omega) \tag{4.5}$$

となり、$T \to 0$ では急激に $c \to 0$

(5) エントロピー S を求めるには、Helmholtz の自由エネルギー

$$
\begin{aligned}
F &= -kt\log Z \\
&= \frac{3}{2}N_A\hbar\omega + 2N_AkT\log(1-\exp(\beta\hbar\omega)) \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

で、$S = \frac{U-F}{T}$ より

$$
S = \frac{1}{T}[\frac{3N_A\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega)-1} - 3N_AkT\log(1-\exp(-\beta\hbar\omega))] \qquad (4.7)
$$