過去問の解答

加瀬陽一　　Kase Youichi [1]

2005年7月10日

[1] check者　　川口　　高畠

1

(1) 運動は xy 平面内でおこり、相対論的運動方程式の x、z 成分は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{(1-\frac{\dot{x}^2+\dot{z}^2}{c^2})}})=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{(1-\frac{\dot{x}^2+\dot{z}^2}{c^2})}})=eE \tag{1.2}$$

(2) 両式を積気して $\dot{x}$ について解くと

$$(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{(1-\frac{\dot{x}^2+\dot{z}^2}{c^2})}}=\frac{mV_0}{\sqrt{(1-\frac{V_0^2}{c^2})}} \tag{1.3}$$

$$\frac{m\dot{z}}{\sqrt{(1-\frac{\dot{x}^2+\dot{z}^2}{c^2})}}=eEt \tag{1.4}$$

$$\dot{x}^2=(V_0)^2(1-\frac{\dot{z}^2}{c^2}) \tag{1.5}$$

これを (1.5) に入れて整理すると

$$\dot{z}=\frac{\alpha t}{\sqrt{(1+(\frac{\alpha t}{c})^2)}} \tag{1.6}$$

$$\dot{x}=\frac{V_0}{\sqrt{(1+(\frac{\alpha t}{c})^2)}} \tag{1.7}$$

ただし、$\alpha=\frac{eE\sqrt{(1-(\frac{V_0^2}{c^2})}}{m}$

これを積分して $t=0$ で $x=0,\ z=0$ とすると、

$$x=\frac{V_0 c}{\alpha}\log[\frac{\alpha t}{c}+\sqrt{(1+(\frac{\alpha t}{c})^2}] \tag{1.8}$$

$$z=(\frac{c^2}{\alpha})[\sqrt{(1+(\frac{\alpha t}{c})^2}-1] \tag{1.9}$$

という軌道を描く。

(3)$\frac{\alpha t}{c}$ が小さいとして展開すると

$$
\begin{aligned}
x &= (\frac{V_0 c}{\alpha}) log[(\frac{\alpha t}{c}) + 1 + (\frac{\alpha t}{c})^2 + \cdots] && (1.10)\\
&= (\frac{V_0 c}{\alpha})(\frac{\alpha t}{c} + \cdots) \to V_0 t && (1.11)\\
z &= (\frac{c^2}{\alpha}) \left[(1 + (\frac{1}{2})(\frac{\alpha t}{c})^2 + \cdots) - 1\right] && (1.12)\\
&= (\frac{c^2}{\alpha}) \left[(\frac{1}{2})(\frac{\alpha t}{c})^2 + \cdots\right] \to (\frac{1}{2})\alpha t^2 && (1.13)
\end{aligned}
$$

となる。

2

(a)

ϕ の x に関する一次偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{p_x}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})x}{r^5}\right] \tag{2.1}$$

さらに、x に関する二次偏微分を求めれば

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-3\frac{2p_x x + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5} + 15\frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})x^2}{r^7}\right] \tag{2.2}$$

同様にして、ϕ の y、z に関する二次偏微分を計算して
これらを加え合わせれば

$$\triangle\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{2.3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-3\frac{2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) + 3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5} + 15\frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})r^2}{r^7}\right] = 0 \tag{2.4}$$

(b)

金属導体の内部深くに電磁界は侵入できない現象を
表皮効果と言う。

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{2.5}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}} \tag{2.6}$$

$$= 1.9 \times 10^{-6} m \tag{2.7}$$

$\boxed{3}$

1)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]u(x)=Eu(x) \tag{3.1}$$

$$\tag{3.2}$$

2)

$$u(0)=u(2a)=0 \tag{3.3}$$

$$\tag{3.4}$$

3)

$$u_n(x) = Asin\left[\frac{\pi n}{2a}\right]x \tag{3.5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}sin\left[\frac{\pi n}{2a}\right]x \tag{3.6}$$

4)

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 \tag{3.7}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{n\pi}{2a}\right]^2 (n=1.2.3\cdot\cdot) \tag{3.8}$$

5)

$$\text{基底状態}\ u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\pi}{2a}\right]x \tag{3.9}$$

$$\text{第一励起状態}\ u_2(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}sin\left[\frac{\pi}{a}\right]x \tag{3.10}$$

6)

$$< P >_n = \int_0^{2a} u_n^* \hat{P} u_n dx = 0 \tag{3.11}$$

7)

$$< x >_n = \int_0^{2a} u_n^* \hat{x} u_n dx = 0 \tag{3.12}$$

8) 確率解釈できる

$$\int_0^{2a} |\psi(x)|^2 dx = 1 \tag{3.13}$$

$$< A >= \int_0^a \psi^* \hat{A} \psi dx \tag{3.14}$$

9)

$$(u_m(x), u_n(x)) = \delta_{mn} \tag{3.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) u_n(y) = \delta(x - y) \tag{3.16}$$

4

1.

電気モーメントベクトル$\boldsymbol{\mu}$ が外部電場$\mathbf{E}$と傾きの角θをなすとき、ポテンシャルエネルギーは

$$u = -E\mu cos\theta \tag{4.1}$$

2.
であるから、$\boldsymbol{\mu}$がその方向の立体角要素$d\omega$の中に見出される確率はカノニカル分布として、

$$\begin{aligned} f(\theta)d\omega &= e^{\frac{-u}{kT}}d\omega \qquad (4.2) \\ &= Cexp\left[\frac{E\mu cos\theta}{kT}\right]d\omega \qquad (4.3) \end{aligned}$$

(Cは規格化定数)

3.
したがって、$\mathbf{E}$の方向成分$\mu cos\theta$の平均$\overline{\mu}$は

$$\begin{aligned} \overline{\mu} &= \mu\int\int f(\theta)cos\theta d\omega \qquad (4.4) \\ &= \mu\frac{\int\int cos\theta e^{E\mu(\frac{cos\theta}{kT})}d\omega}{\int\int e^{E\mu(\frac{cos\theta}{kT})}d\omega} \qquad (4.5) \\ &= \mu L\frac{E\mu}{kT} \qquad (4.6) \end{aligned}$$

4.
電気分極Pは単位体積当りの$\frac{N}{V}$個の分子の平均電気2重極モーメントであるから

$P = \frac{N}{V}\mu L\frac{E\mu}{kT}$となるので

$$\chi = \frac{NL\mu^2}{VkT} \tag{4.7}$$

$\boxed{5}$

電子の波長 λ として、円周 $2\pi r$ の中に整数個の波がないといけないから

$$2\pi r = n\lambda \tag{5.1}$$
$$P = \frac{h}{mv} \tag{5.2}$$
$$2\pi r = \frac{nh}{mv} \tag{5.3}$$

動径方向の運動方程式は

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} \text{ より} \tag{5.4}$$
$$mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r} \tag{5.5}$$

電子がもつ全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r} \tag{5.6}$$
$$(5.5) \text{ より } E = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r} \tag{5.7}$$

(5.3)(5.5) より基底状態の回転半径は

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2} \times n^2 (n = 1.2.3\cdot\cdot) \tag{5.8}$$

また (5.7)(5.8) より基底状態におけるエネルギーは

$$E = -\frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \times \frac{1}{n^2} (n = 1.2.3\cdot\cdot) \tag{5.9}$$

(5.8)(5.9) より基底状態に比べ第一励起状態の
回転半径は 4 倍
エネルギーは $\frac{1}{4}$ 倍　になる