平成13年信州大学修士課程1期　入試解答

大村佳之
確認 西村宗基

平成17年11月14日

問題 1 Q1 運動方程式の両辺に、$\mathbf{r}_i$ の内積をとると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\cdot\mathbf{r}_i\right)=\frac{d^2}{d^2t}\mathbf{r}_i+\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)^2$$

より、左辺は

$$\sum_i m_i\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}\cdot\mathbf{r}_i=\frac{d}{dt}\sum_i\left(m_i\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\cdot\mathbf{r}_i\right)-\sum_i m_i\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)^2 \tag{1}$$

である。ところが右辺の 2 項目は 0。
次に右辺は

$$\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{Gm_im_j\left(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right)\cdot\left(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i\right)}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|^3}=-\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{Gm_im_j}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|} \tag{2}$$

(1) = (2) より

$$\sum_i m_i\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{Gm_im_j}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}=0$$

Q2

$$\Omega=\frac{1}{2}\int_v\rho\Psi dV \tag{3}$$

$$\rho=\frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$\int_S\mathbf{C}\cdot d\mathbf{S}=4\pi G\,M'$$

ただし、M' は中心から r の距離内にある質量

$$0<r<R\text{ のとき}\qquad C=-\frac{4\pi\rho Gr}{3}$$

$$r>R\text{ のとき}\qquad C=-\frac{4\pi\rho GR^3}{3r^2}$$

したがってポテンシャルは

$$\begin{aligned}\Psi_{(r)}&=\int_\infty^R\frac{4\pi\rho Gr}{3}dr+\int_R^r\frac{4\pi\rho GR^3}{3r^2}dr\\&=-\frac{4\pi\rho G}{6}\left(3R^2-r^2\right)\end{aligned}$$

であるから、(3) よりΩが計算できて

$$
\begin{aligned}
\Omega &= -\frac{4^2\pi^2 G\rho^2}{2\cdot 6}\int_0^R \left(3R^2 - r^2\right) r^2 dr \\
&= -\frac{4^2\pi^2 G}{2\cdot 6}\left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right)^2 \frac{4R^5}{5} \\
&= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}
\end{aligned}
$$

Q3

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}I\omega^2 \\
&= \frac{1}{5}MR^2\omega^2
\end{aligned}
$$

2T+Ω=0 に代入すると

$$
\begin{aligned}
\omega^2 &= \frac{3GM}{2R^2} \\
&= 2\pi\rho G \\
\omega &= \sqrt{2\pi\rho G}
\end{aligned}
$$

よって、Ωが R に依らない。

問題 2

Q1 解は次のように表せる。

$$v = ae^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{eE\tau}{m} \tag{1}$$

この解が方程式を満たしていることを確かめる。左辺は

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{ma}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

右辺は

$$\begin{aligned} -eE - \frac{m}{\tau}v &= -eE - \frac{m}{\tau}\left(ae^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{eE\tau}{m}\right) \\ &= -\frac{ma}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

よって方程式を満たしている。次に定数 a を求めなければならないが、初期条件を課すことで決定できる。t=0 で v=0 とする。(1) 式より

$$a = \frac{eE\tau}{m}$$

よって解は、

$$v = -\frac{eE\tau}{m}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$t = \infty$ で $v = -\frac{eE\tau}{m}$ これは電子の終端速度が電場と緩和時間に比例し、質量に反比例することを意味している。

Q2 Maxwell 方程式より

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

左から $\nabla\times$ を掛けると

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{B} \tag{2}$$

(2) の左辺は

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$$

に書き直せる。ところが Maxwell 方程式より

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

(2) の右辺は Maxwell 方程式より

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

したがって (2) は

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

電場 $\mathbf{E}$ に関する波動方程式で書き表せた

上と同じ議論で磁場 $\mathbf{B}$ に関する同じ形の波動方程式が書ける。また $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$ である。これから電場と磁場は互いに垂直に光速度 c で伝わる。

問題 5

Q1 電子に働く遠心力と電荷による引力がつり合っている。

$$\begin{aligned} m\frac{d^2r}{dt^2} &= mr\omega^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \\ &= 0 \\ m\frac{d^2\theta}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Q2 ボーアの量子条件より

$$\begin{aligned} l &= mvr \\ &= \frac{nh}{2\pi} \end{aligned}$$

l は電子の角運動量である。$v = r\omega$ なので

$$mr^2\omega = \frac{nh}{2\pi} \tag{2}$$

(1) と (2) より ω を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{n^2h^2}{4\pi^2mr^3} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ r_n &= \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi m e^2} \end{aligned} \tag{3}$$

電子の全エネルギーは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーからなる。

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ &= \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \end{aligned}$$

(1) 式を用いて ω を消去すると

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

さらに (3) 式を代入すると

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2n^2} \tag{4}$$

振動数条件から

$$E_{n'} - E_n = h\nu$$

(4) 式を代入すれば

$$\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}) = h\nu$$

$n = 2$ 、$R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}$ とおくと、バルマーの公式が得られる。

$$\nu = cR(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n'^2}) \tag{5}$$

また (4) 式は

$$E_n = -hcR\frac{1}{n^2} \tag{6}$$

と書ける。

Q3 (3) 式で $n = 1$ を代入

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

Q4 (5) 式で $n' = 3$ のとき一番長い波長が得られる。$\nu = \frac{c}{\lambda}$ を代入すると

$$\frac{1}{\lambda_{max}} = R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2})$$
$$R = 1.1 \times 10^7 \mathrm{m}^{-1}$$

イオン化エネルギーは (6) で $n = 1$ を代入し、符号を変えると得られる。

$$\begin{aligned} E &= hcR \\ &= 2.2 \times 10^{-18} \mathrm{J} \end{aligned}$$

問題4

Q1　３つの原子にそれぞれ１、２、３と番号を付け、$-\mu$ のエネルギーをもつ状態を$\uparrow$、$+\mu$ のエネルギーをもつ状態を$\downarrow$とすると、例えば系の状態は$\uparrow_1\downarrow_2\downarrow_3$ のように表せる。左から１、２、３の原子を表すように矢印を並べると約束して、添字を省略する。

	$\uparrow\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow\downarrow$	
$\downarrow\downarrow\downarrow$	$\downarrow\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow\uparrow$	$\uparrow\uparrow\uparrow$
	$\downarrow\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow\uparrow$	
-3μ	$-\ \mu$	$+\mu$	$+3\mu$

Q2　同じエネルギーで縮退している各状態は、同じ確率で出現する。したがって求める確率は $P_{+3\mu}$、$P_{+\mu}$、$P_{-\mu}$、$P_{-3\mu}$ となる。系の分配関数は

$$Z_3(T) = (e^{-\beta\mu} + e^{\beta\mu})^3$$

ただし

$$\beta = -\frac{1}{k_B T}$$

各状態のボルツマン因子を $Z_3(T)$ で割ると、次式が得られる。

$$P_{+3\mu} = \frac{e^{3\beta\mu}}{Z_3}$$
$$P_{+\mu} = \frac{e^{\beta\mu}}{Z_3}$$
$$P_{-\mu} = \frac{e^{-\beta\mu}}{Z_3}$$
$$P_{-3\mu} = \frac{e^{-3\beta\mu}}{Z_3}$$

Q3

$$
\begin{aligned}
Z_N(T) &= Z_1(T)^N \\
&= (e^{-\beta\mu} + e^{\beta\mu})^N \\
&= \sum_{s=0}^{N} \frac{N!}{(N-s)!s!} e^{-\beta\mu s} e^{\beta\mu(N-s)} \\
&= \sum_{s=0}^{N} \frac{N!}{(N-s)!s!} (e^{N-2s})^{\beta\mu}
\end{aligned}
$$

簡単にすると

$$
Z_N(T) = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{N!}{(\frac{N}{2}-m)!(\frac{N}{2}+m)!} e^{2m\beta\mu}
$$

N が非常に大きいときを考えているので、$\frac{N}{2}$ が整数でないかどうかは重要でない。

Q4　各状態を l、その状態のエネルギーを ϵ_l で表すと、系のエネルギーは

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{\sum_l \epsilon_l e^{\beta\epsilon_l}}{Z_N} \\
&= \frac{1}{Z_N} \frac{\partial}{\partial\beta} \sum_l e^{\beta\epsilon_l} \\
&= \frac{1}{Z_N} \frac{\partial Z_N}{\partial\beta} \\
&= \frac{\partial}{\partial\beta} log Z_N \\
&= N \frac{\partial}{\partial\beta} log(e^{-\beta\mu} + e^{\beta\mu}) \\
&= N\mu \frac{e^{\beta\mu} - e^{-\beta\mu}}{e^{\beta\mu} + e^{-\beta\mu}} \\
&= N\mu \, tanh(\beta\mu)
\end{aligned}
$$