平成14年度(1次課程)解答

斎藤 高
解答確認者 川口賢二　石神 真慈

平成17年11月25日

$\boxed{1}$

1)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 - m_2 g z \\ &= \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 - m_2 g(l - r) \end{aligned}$$

2)

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + m_2 g(l - r)$$

$m_1 = m_2 = m$ より

$$= m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 + mg(l - r)$$

$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{r}}) - \frac{\delta L}{\delta r} = 0$ より

$$\frac{d}{dt}(2m\dot{r}) - (mr\dot{\theta}^2 - mg) = 0$$
$$2m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg = 0$$

3)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r} \times m_1\boldsymbol{v} \\ \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} &= \dot{\boldsymbol{r}} \times m_1\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times m_1\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{N} = 0 \end{aligned}$$

よって、角運動量は保存される。

4)

$$\begin{aligned} L &= |\boldsymbol{L}| = mr\dot{\theta}sin\theta \\ \dot{\theta} &= \frac{L}{m_1 r sin\theta} \end{aligned}$$

よって、

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m_1 r sin\theta} + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 - m_2 g(l-r)$$

$\boxed{2}$

1. 電束密度 D を求める、

$$\begin{aligned} 0 < r < a \text{ のとき、} \int_s \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_V \rho dV \\ 4\pi r^2 D &= q \end{aligned}$$

$$\text{ここで、} q = \frac{3\pi a^3/4}{3\pi r^3/4} Q = \frac{r^3}{a^3} Q$$

$$\text{よって、} D = \frac{Q}{4\pi a^3} r \tag{-7}$$

$$\begin{aligned} r > a \text{ のとき、} \int_s \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_V \rho dV \\ 4\pi r^2 D &= Q \end{aligned}$$

$$\text{よって、} D = \frac{Q}{4\pi r^2} r \tag{-9}$$

電場 B を求める

$$0 < r < a \text{ のとき、} E = \frac{D}{\epsilon_0}$$

$$\text{(1) より } E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r \tag{-9}$$

$$a < r < b \text{ のとき、} E = \frac{D}{\epsilon}$$

$$\text{(2) より、} E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \tag{-10}$$

$$r > b \text{ のとき、}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0}$$

$$\text{(2) より、} E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{-12}$$

電場Vを求める

$$
\begin{aligned}
0<r<a\text{のとき、}V &= -\int_{\infty}^{b}\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}dr-\int_{b}^{a}\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}dr-\int_{a}^{r}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3}rdr \\
&= \frac{Q}{4\pi a}\left[\frac{1}{\epsilon}+\frac{1}{2\epsilon_0}\right]+\frac{Q}{4\pi b}\left[\frac{1}{\epsilon_0}-\frac{1}{\epsilon}\right]-\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^3}r^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a<r<b\text{のとき、}V &= -\int_{\infty}^{b}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr-\int_{b}^{r}\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon r}+\frac{Q}{4\pi b}\left[\frac{1}{\epsilon_0}-\frac{1}{\epsilon}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r>b\text{のとき、}V &= -\int_{\infty}^{r}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}
\end{aligned}
$$

2.

$a)$

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{z}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idz}{r^2}sin\theta$$

$x_0=rsin\theta \qquad rd\theta=dzsin\theta$より

$$r=\frac{x_0}{sin\theta} \qquad dz=\frac{r}{sin\theta}d\theta \tag{-25}$$

(3) より、

$$dz=\frac{x_0}{sin^2\theta}$$

よって、

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I sin\theta}{\left[\frac{x_0}{sin^2\theta}\right]^2}\frac{x_0}{sin^2\theta}d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0}sin\theta d\theta$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2} sin\theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0}(cos\theta_1 - cos\theta_2) \end{aligned}$$

$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = \pi$ とし、

$$B = \frac{mu_0 I}{2\pi x_0}$$

$b)$ AB について、

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= B\Delta s = B(x)av\Delta t = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}av\Delta t \\ V_{AB} &= \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}av \end{aligned}$$

CD について、

$$\Delta\Phi = B(x+b)av\Delta t = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+b)}av\Delta t$$

$$V_{CD} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+b)}av$$

よって、

$$V = V_{AB} - V_{CD} = \frac{\mu_0 Iav}{2\pi}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b}\right]$$

$\boxed{3}$

1.

$$
\begin{aligned}
[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= [\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{q} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}), \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{q} - \frac{i\hat{p}}{m\omega})] \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}[\hat{q} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}, \hat{q} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}] \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}([\hat{q}, \hat{q}] - [\frac{i\hat{p}}{m\omega}, \hat{q}] + [\hat{q}, \frac{i\hat{p}}{m\omega}] - [\frac{i\hat{p}}{m\omega}, \frac{i\hat{p}}{m\omega}]) \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar} \times 2 \times [\frac{i\hat{p}}{m\omega}, \hat{q}] \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\hat{a}, \hat{a}] &= [\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{q} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}), \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{q} + \frac{i\hat{p}}{m\omega})] \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}[\hat{q} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}, \hat{q} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}] \\
&= -\frac{m\omega}{2\hbar}([\hat{q}, \hat{q}] + [\frac{i\hat{p}}{m\omega}, \hat{q}] + [\hat{q}, \frac{i\hat{p}}{m\omega}] + [\frac{i\hat{p}}{m\omega}, \frac{i\hat{p}}{m\omega}]) \\
&= -\frac{m\omega}{2\hbar}([\frac{i\hat{p}}{m\omega}, \hat{q}] + [\hat{q}, \frac{i\hat{p}}{m\omega}]) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] &= [\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{q} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}), \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{q} - \frac{i\hat{p}}{m\omega})] \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}[\hat{q} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}, \hat{q} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}] \\
&= -\frac{m\omega}{2\hbar}([\hat{q}, \hat{q}] + [-\frac{i\hat{p}}{m\omega}, \hat{q}] + [\hat{q}, -\frac{i\hat{p}}{m\omega}] + [-\frac{i\hat{p}}{m\omega}, -\frac{i\hat{p}}{m\omega}]) \\
&= -\frac{m\omega}{2\hbar}([-\frac{i\hat{p}}{m\omega}, \hat{q}] + [\hat{q}, -\frac{i\hat{p}}{m\omega}]) = 0
\end{aligned}
$$

2.

$$\begin{aligned}
\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} &= \{\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{\xi} + \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}), \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{\xi} - \frac{i\hat{\eta}}{m\omega})\} \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\{\hat{\xi} + \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}, \hat{\xi} - \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}\} \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}(\{\hat{\xi}, \hat{\xi}\} - \{\frac{i\hat{\eta}}{m\omega}, \hat{\xi}\} + \{\hat{\xi}, \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}\} - \{\frac{i\hat{\eta}}{m\omega}, \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}\}) \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar} \times \frac{2\hbar}{m\omega} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\hat{b}, \hat{b}\} &= \{\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{\xi} + \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}), \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{\xi} + \frac{ie\hat{ta}}{m\omega})\} \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\{\hat{\xi} + \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}, \hat{\xi} + \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}\} \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}(\{\hat{\xi}, \hat{\xi}\} + \{\frac{i\hat{\eta}}{m\omega}, \hat{\xi}\} + \{\hat{\xi}, \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}\} + \{\frac{i\hat{\eta}}{m\omega}, \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}\}) \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}(\frac{\hbar}{m\omega} - \frac{\hbar}{m\omega}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger\} &= \{\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{\xi} - \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}), \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{\xi} - \frac{ie\hat{ta}}{m\omega})\} \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\{\hat{\xi} - \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}, \hat{\xi} - \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}\} \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}(\{\hat{\xi}, \hat{\xi}\} - \{\frac{i\hat{\eta}}{m\omega}, \hat{\xi}\} - \{\hat{\xi}, \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}\} - \{\frac{i\hat{\eta}}{m\omega}, \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}\}) \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}(\frac{\hbar}{m\omega} - \frac{\hbar}{m\omega}) = 0
\end{aligned}$$

3.

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{q} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}) \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{q} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}) \quad \text{より、}$$

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \qquad \hat{p} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \tag{-72}$$

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{\xi} + \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}) \qquad \hat{b}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{\xi} - \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}) \quad \text{より、}$$

$$\hat{\xi} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \qquad \hat{\eta} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \tag{-73}$$

(4), (5) より、

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2m}\{\frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\{\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\}^2 \\
&\quad + i\omega \times \hat{\xi}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \times \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) + \frac{\hbar\omega}{2}\{\hat{b}^2 - \hat{b}\hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{b} - (\hat{b}^\dagger)^2\} \\
&= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b}) \qquad \text{（交換関係、反交換関係より）}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\
\hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} &= \hat{A}(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A})\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\
\hat{A}\{\hat{B}, \hat{C}\} - \{\hat{A}, \hat{C}\}\hat{B} &= \hat{A}(\hat{B}\hat{C} + \hat{C}\hat{B}) - (\hat{A}\hat{C} + \hat{C}\hat{A})\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\} &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\
\hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + \{\hat{A}, \hat{C}\}\hat{B} &= \hat{A}(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C} + \hat{C}\hat{A})\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\
\hat{A}\{\hat{B}, \hat{C}\} - [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} &= \hat{A}(\hat{B}\hat{C} + \hat{C}\hat{B}) - (\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A})\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{C}\hat{A}\hat{B}
\end{aligned}$$

5.

$$\hat{Q} = \sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b} \qquad \hat{Q}^\dagger = \sqrt{\hbar\omega}\hat{b}^\dagger\hat{a}$$

a)

$$\begin{aligned}
[\hat{Q}, \hat{a}] &= \sqrt{\hbar\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{b}) \\
&= \sqrt{\hbar\omega}\{\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{a} - (1 + \hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{b}\} \\
&= -\sqrt{\hbar\omega}\hat{b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\hat{Q}, \hat{b}\} &= \sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{b} + \hat{b}\sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b} \\
&= \sqrt{\hbar\omega}\hat{b}\hat{a}^\dagger\hat{b} \\
&= \sqrt{\hbar\omega}\hat{a}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} &= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{b}) \\
&= \hbar\omega\{\hat{a}^\dagger(1 - \hat{b}^\dagger\hat{b})\hat{a} + \hat{b}^\dagger(1 + \hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{b}\} \\
&= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b}) \\
&= \hat{H}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\hat{Q}, \hat{Q}\} &= \hat{Q}^2 + \hat{Q}^2 \\
&= 2\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{a}^\dagger\hat{b} \\
&= 2\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{b} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}^\dagger\} &= (\hat{Q}^\dagger)^2 + (\hat{Q}^\dagger)^2 \\
&= 2\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{a} \\
&= 2\hbar\omega\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{a} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$c)$

$$
\begin{aligned}
[\hat{Q},\hat{H}] &= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b}-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{b}-\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{a}^\dagger\hat{b}) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b}-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{b}) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}\{\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{b}(1-\hat{b}\hat{b}^\dagger)-\hat{a}^\dagger(1+\hat{a}\hat{a}^\dagger)\hat{b}\} \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{b}\hat{b}^\dagger \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\hat{Q}^\dagger,\hat{H}] &= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(\hat{b}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{b}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{a}-\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{a}) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{a}-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}-\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{a}) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}\{(\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{b}^\dagger\hat{a}-\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{a}\} \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{a} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{5}$

1)
単位体積あたりの放射のエネルギー u は振動数 ν と、温度 T に依存していて、$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ は、エネルギー u の振動数に依存している部分である。ν が増加すると ν^2 に比例して u が増加する。

2)
$e^{\frac{h\nu}{kT}}$ を一次の項でテイラー展開すると、$1+\frac{h\nu}{kT}$ となり、$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$ に代入すると kT となるので、エネルギー u のに依存している部分である。T が増加すると T に比例して u が増加する。

3)
$\frac{h\nu}{kT}\cong 0$ のとき、2) より $\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}=kT$ となる。よって、$u(\nu,T)d\nu\cong\frac{8\pi KT\nu^2}{c^3}d\nu$

4)

$e^{\frac{h\nu}{kT}}\gg 1$ より、分母の 1 を省略して、$u(\nu,T)d\nu\cong\dfrac{8\pi KT\nu^2}{c^3}e^-\dfrac{h\nu}{kT}d\nu$

5)

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{c}{\nu}\text{より、}d\nu=\frac{c}{\nu^2}d\lambda \\ u(\nu,T)d\lambda &= \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\end{aligned}$$

u の最大値を与える λ の値 λ_m は、次の式を満たす

$$\frac{du}{d\lambda}=\frac{8\pi hc}{\lambda^6}\frac{-5(e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1)+(\frac{hc}{kT\lambda})e^{\frac{hc}{kT\lambda}}}{(e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1)^2}=0$$

$x=\frac{hc}{kT\lambda}$ と置くと、

$$(1-\frac{x}{5})e^x=1$$

この式の根 x_m が λ_m を与える、

$$x_m = \frac{hc}{kT\lambda_m} \text{より、} \lambda_m = \frac{hc}{x_m kT} = \frac{b}{T} \quad (b = \frac{x_m k}{hc})$$

6)

表面から放射される放射の全エネルギーは

$$E = \frac{c}{4}\int_0^\infty u(\nu,T)d\nu = \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{\lambda T}}-1}d\nu$$

$(x = \frac{h\nu}{kT}$ とすると、$d\nu = \frac{kT}{h}dx$ より、$)$

$$= \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx$$

$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = 3!\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$ より、

$$E = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4 = \sigma T^4$$