2002年度　大学院博士課程前期　2次試験
問題解答例

作成者　　宮澤　寛史

解答確認者　　西村　宗基

1. 力学

1) 系の全エネルギー E(t) は

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(r-l)^2 && (1) \\ &= \frac{1}{2}m(\frac{d\theta}{dt})^2 + \frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2 + \frac{1}{2}k(r-l)^2 && (2) \end{aligned}$$

ここで運動量 K、ポテンシャル U とすると

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{2}k(r-l)^2 \quad (4)$$

$$(5)$$

2)

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} && (6) \\ &= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} && (7) \end{aligned}$$

両辺 t で微分すると (t での微分を ˙ で表す。例えば $\mathbf{r}$ の一階微分は $\dot{\mathbf{r}}$ とあらわす)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) && (8) \\ &= 0 && (9) \end{aligned}$$

ここで $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}$ は同じベクトルであるので、ベクトル積は 0 にまた $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$ についても、中心力であることから、$\mathbf{r}$ と $\ddot{\mathbf{r}}$ は平行または反平行でありベクトル積は 0 となる式 (5)(6) より、角運動量は保存されることが示された。

3)

$$\begin{aligned} L &= |\mathbf{L}| && (10) \\ &= |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| && (11) \\ &= |m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| && (12) \\ &= mr\dot{r}\sin\phi && (13) \end{aligned}$$

ここで $r = |\mathbf{r}|, \dot{r} = |\dot{\mathbf{r}}|$ であり、ϕ は $\mathbf{r}$ と $\dot{\mathbf{r}}$ のなす角である。$\dot{r}\sin\phi$ は $\dot{\mathbf{r}}$ の θ 方向成分の大きさであり

$$\dot{r}\sin\phi = r\omega = r\dot{\theta} \tag{14}$$

よって

$$L = mrr\dot{\theta} = mr^2\omega \tag{15}$$

これを変形すれば

$$\omega = \frac{L}{mr^2} \tag{16}$$

問１）の (2) 式にこれを代入すれば

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2 + \frac{1}{2}k(r-l)^2 \tag{17}$$

4) 全力学的エネルギーのうち r 方向 (動径) の運動エネルギー以外の成分を有効ポテンシャル W(r) とすると、問 3) で求めた式からから

$$W(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r-l)^2 \tag{18}$$

常に $W(r) > 0$ であり、また

$$\begin{aligned} \frac{dW(r)}{dr} &= -\frac{2L^2}{2mr^3} + k(r-l) \qquad (19) \\ &= -\frac{L^2}{mr^3} + k(r-l) \qquad (20) \\ &= 0 \qquad (21) \end{aligned}$$

が極値の条件であり、これを満たす r は

$$r^3(r-l) = \frac{L^2}{km} \tag{22}$$

を解くことによって得られる
また W(r) 第一項は,

r → 0 で、急激に ∞ に近づき

r → ∞ で 0 に近づく

同様に第二項は、

r → 0 で、0 に近づき

r → ∞ で r^2 の程度でゆっくりと ∞ に近づく

よって以上の二項を足し合わせた W(r) は

r → 0 で、急激に ∞ に近づき

r → ∞ で r^2 の程度でゆっくりと ∞ に近づく

ようなグラフを描く。

5) 円運動において、半径一定であるので、

$$\frac{dr}{dt} = 0 \tag{23}$$

またこれをさらに時間で微分したものも 0 となり

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 0 \tag{24}$$

が成り立つ。ここでハミルトニアンの正準方程式により、

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial r} \tag{25}$$

ここで $\dot{p}$ は r 方向運動量を時間で一階微分したものである。問 1) の結果をこれに代入すれば

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{dW}{dr} = \frac{L^2}{mr^3} - k(r-l) \tag{26}$$

条件式 (21) よりこれは 0 となる

$$\frac{L^2}{mr^3} - k(r-l) = 0 \tag{27}$$

$$r^3(r-l) = \frac{L^2}{km} \tag{28}$$

これが半径 r の満たすべき方程式である。

6)$K' = \frac{1}{2}mv^2$ とおいて、

$$E = K' + W(r) \tag{29}$$

と考える。E は定数であり、K' は常に正であるので、運動は

$$E > W(r) \tag{30}$$

の領域で行われる。r →∞、r → 0 で W(r) は∞に近づくので、運動は r について限られた領域でおこなわれ、r 方向に振動する。よって r 方向の運動は周期的である。

$$L = mr^2\omega \tag{31}$$

の関係から

$$\omega = \frac{L}{mr^2} \tag{32}$$

が得られる。この式から角速度 ω は r に伴って変化することが読み取れ、また、常に r＞0 であるので、角速度 ω と r の周期とは同じであると考えられる。よって、質点の運動は周期的である。次に周期 T を考える。

$$\begin{aligned} E &= K' + W(r) \qquad (33)\\ &= \frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2 + W(r) \qquad (34) \end{aligned}$$

より

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - W(r))} \tag{35}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{E - W(r)}} + const \tag{36}$$

ここで $const$ は積分定数です。r_1, r_2 の間で運動するとすると、周期 T は r_1, r_2 間を動く時間の 2 倍に等しく

$$T(E) \;=\; \sqrt{2m}\int_{r_1(E)}^{r_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E-W(r)}} \tag{37}$$

がこの運動の周期である。また、式 (31) より

$$r = \sqrt{\frac{L}{m\omega}} \tag{38}$$

です。ここで、$r > 0$ であることから、正符号を取りました。これを W(r) に代入すれば、

$$W(\omega) \;=\; \frac{L}{2}\omega + \frac{k}{2}\left(\sqrt{\frac{L}{m\omega}} - l\right) \tag{39}$$

と ω の関数で表すことができる。
$\omega \to 0$、$\omega \to \infty$で W(ω) は∞に近づくので、W(r) と同様の考察により、角速度 ω に関してもすでに示したとおり、周期的運動をすることがわかり、その周期は r 方向の周期と同じ T である。
(32) 式 $\omega = \frac{L}{mr^2}$ より、r が最大（$r = r_2$) のとき、角速度は最小であり、r が最小（$r = r_1$) のとき、角速度は最大となる。また、半径 r の増加に伴って、角速度 ω は減少し、半径 r の減少に伴って、角速度は ω は増加する。以上の考察より、質点の軌道は、$r = l$ の円の円周近くを、振動しながら回転する。
また、遠心力により、回転は回転の無いときのつりあいの位置より外に広がり、$|r_2 - l| > |r_1 - l|$ である。

2. 電磁気学

1)$a >> r$ の条件より、それぞれの導線上の電荷分布は中心軸まわりで対称と考えてよい。導体 A,B の電荷が点 P につくる電界をそれぞれ E_1, E_2 とする。この 2 つの電場を重ね合わせることで、両者のつくる電場 E が得られる。

まず導体 A のみについて考える。電荷分布の対称性により電気力線は円柱の中心軸から放射線状に外側を向き、電界 E_1 の大きさは軸からの距離 x の関数 $E_1(x)$ であらわせる。今、半径 x、高さ h の同軸円筒を閉曲面 S にとり、ガウスの法則をを適用する。

$$\int_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q(x)}{\epsilon_0} \tag{40}$$

ここで、左辺について、閉曲面 S を同軸円筒の側面、上面、下面に分けて考える。上面、側面に対する微分面積 $d\mathbf{S}$ は電場と垂直であるため、電場との内積は 0 となる。よって残るのは側面方向のみの積分のみで、側面方向微分面積 $d\mathbf{S}$ と電場が平行であることを考えれば

$$\int_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{側面}} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = E(x) \cdot 2\pi x h \tag{41}$$

が成り立つ。よって

$$E(x) \cdot 2\pi x h = \frac{Q(x)}{\epsilon_0} \tag{42}$$

問でもとめる円柱外 $r < x$ において、$Q(x) = \sigma h$ より

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 x} \tag{43}$$

となる。同様に考えて x → x-a、$\sigma \to -\sigma$ と置き換えれば、導線 B による電場 E_2 は

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 (a-x)} \tag{44}$$

となる。よって、点 P における電界 $\mathbf{E}$ の大きさ E は、これらの重ね合わせによって

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}\right) \tag{45}$$

2) 問 1) の結果を用いて電位差 V は

$$V = -\int_r^{a-r} E dx = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\int_r^{a-r}(\frac{1}{x}+\frac{1}{a-x}) \tag{46}$$

$$= \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0}\log\frac{a-r}{r} \tag{47}$$

$$\cong \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0}\log\frac{a}{r} \tag{48}$$

3)　問 2) の結果を用いれば, 単位長さあたりの電気容量 C は

$$C = \frac{\sigma}{V} \cong \frac{\pi\epsilon_0}{\log(a/r)} \tag{49}$$

3. 量子力学

1)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - [E + U_0\delta(x)\psi(x)] = 0 \tag{50}$$

2)　微笑区間 [-ϵ, ϵ] を考える

$$\begin{aligned}(\frac{d\psi}{dx})_\epsilon - (\frac{d\psi}{dx})_{-\epsilon} &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \frac{d}{dx}\frac{du}{dx} &(51)\\ &= -\frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx[U_0\delta(x) + E]\psi(x) &(52)\\ &= -\frac{2m}{\hbar^2}[U_0\psi(0) + E\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\psi(x)] &(53)\\ &= -\frac{2m}{\hbar^2}U_0\psi(0) &(54)\end{aligned}$$

最後の式変形では、ψ の連続性から $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\psi(x) = 0$ であることを用いました。
以上により, 波動関数の一階微分 $\frac{d\psi}{dx}$ は連続でないことが示された。

3)　問 1) で求めた式を変形すると

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{(E + U_0\delta(x))2m}{\hbar^2}\psi(x) \tag{55}$$

x $\neq$ 0 において

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{2m|E|}{\hbar^2}\psi(x) \quad = \quad \kappa^2\psi \tag{56}$$

ここで

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} \tag{57}$$

とおいた。$\psi = e^{\lambda x}$ と仮定して上式に代入すると

$$\lambda^2\psi = \kappa^2\psi \tag{58}$$

$$\lambda = \pm\kappa \tag{59}$$

$$\tag{60}$$

よって, 解として $\psi = e^{\pm\kappa x}$ が考えられ、一般解は

$$\psi = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} \tag{61}$$

$x > 0$ において、束縛条件 x → ∞ で、ψ→ 0 を満たすとすると A=0

$$\psi = Be^{-\kappa x} \quad (x > 0) \tag{62}$$

同様に

$$\psi = Ae^{\kappa x} \quad (x < 0) \tag{63}$$

x=0 における連続性から、A=B であり、規格化条件から

$$A^2[\int_{-\infty}^{0} e^{2\kappa x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2\kappa x}dx] = A^2\frac{1}{\kappa} = 1 \tag{64}$$

$$A = \kappa^{1/2} \tag{65}$$

よって解は

$$\psi = \kappa^{1/2}e^{-\kappa x} \quad (x > 0) \tag{66}$$

$$\psi = \kappa^{1/2}e^{\kappa x} \quad (x < 0) \tag{67}$$

ここで

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} \tag{68}$$

である。

4) 束縛状態のエネルギー固有値を求める。問 2) でもとめた、$\frac{d\psi}{dx}$ の不連続性の式

$$(\frac{d\psi}{dx})_{\epsilon} - (\frac{d\psi}{dx})_{-\epsilon} = -\frac{2m}{\hbar^2}U_0\psi(0) \tag{69}$$

に問 3) で求めた解を代入すれば

$$\kappa^{1/2}(-\kappa - \kappa) = -\kappa^{1/2}\frac{2m}{\hbar^2}U_0 \tag{70}$$

$$\kappa = \frac{mU_0}{\hbar^2} \tag{71}$$

$$\kappa^2 = (\frac{mU_0}{\hbar^2})^2 = \frac{2m}{\hbar^2}|E| \tag{72}$$

$$|E| = \frac{mU_0^2}{2\hbar^2} \tag{73}$$

4. 統計力学

1) 理想気体では $(\frac{\partial U}{\partial V})_T = 0$ であるから、モル数 n とすれば、

$$
\begin{aligned}
dU &= (\frac{\partial U}{\partial T})_V dT + (\frac{\partial U}{\partial V})_T dV &(74)\\
&= nC_V dT = d'Q - PdV &(75)
\end{aligned}
$$

エントロピー S を T,V の関数とすればこれと、$PV = nRT(P = \frac{nRT}{V} = \frac{RT}{v})$ を用いて

$$
\begin{aligned}
ds &= \frac{dS}{n} &(76)\\
&= \frac{d'Q}{nT} &(77)\\
&= \frac{1}{T}(C_V dT + P\frac{dV}{n}) &(78)\\
&= C_V \frac{dT}{T} + R\frac{dv}{v} &(79)
\end{aligned}
$$

したがって、定積モル比熱 $C_V = $ 一定 であるので、理想気体の 1 モルあたりのエントロピーは

$$s = C_V \log T + R \log v + \text{定数} \tag{80}$$

不定な付加定数を除いて書けば

$$s = C_V \log T + R \log v \tag{81}$$

2) 準静的断熱変化においては d'Q=0 より、dS=0 であり、エントロピーは変化しない。しかし、断熱自由膨張は不可逆過程である。いま、不可逆変化で物体の状態が A から B へ移り、可逆変化 (準静変化) で B から A へもどったとするとクラジウスの不等式より、

$$(\int_A^B)_{\text{不可逆}} + (\int_B^A)_{\text{可逆}} = (\int_A^B)_{\text{不可逆}} - dS < 0 \tag{82}$$

よって, 不可逆変化をした際に温度 T で吸収した微量の熱量 d'Q とすれば、

$$dS > \frac{d'Q}{T} \tag{83}$$

これは不可逆過程では常に、エントロピーが増加する事を示す。断熱自由膨張は不可逆過程であり、エントロピーは増加する

3) 混合前後の状態を状態 1、状態 2 とする。1 → 2 の変化は不可逆変化であるが、これを次のような準静的過程で置き換えてエントロピーの変化を計算する。（エントロピーは状態量で変化量は道筋によらないので道筋を置き換えて計算してもよい）　状態 1 と等価な状態

A,B が別々に体積 V_A, V_B を占め、温度 T、圧力 P の状態にある。

$$PV_A = n_A RT \ , \ PV_A = n_A RT \tag{84}$$

が成り立つ。

可逆的に等温膨張させる。A,B を可逆的に等温膨張させて体積を V にする。A,B の圧力 P_1, P_2 は $P_1 V = PV_A, P_2 V = PV_B$ より

$$P_1 = \frac{PV_A}{V} \ , \ P_1 = \frac{PV_A}{V} \tag{85}$$

に変化する。　壁の片方を半透明壁にして可逆的に混合する A の入っている方は B を通し A を通さない半透明壁、B の入っている方は A を通し B を通さない半透明壁を考える。この半透壁を通して A,B を混合する。この過程では体積変化の仕事は相殺して、温度一定で熱の出入りはないので、内部エネルギーも変化しない。

以上の 3 過程を通して混合する。

熱の出入りは　の等温過程だけで、問 1) に出てきた式

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V} \tag{86}$$

を用いれば、等温変化であるので、dT=0 であることに気をつけて、

$$\begin{aligned}
\Delta s &= n_A R \int_{V_A}^{V} \frac{dV}{V} + n_B R \int_{V_B}^{V} \frac{dV}{V} && (87)\\
&= n_A R \log \frac{dV}{V_A} n_B R \log \frac{dV}{V_B} && (88)\\
&= -R[n_A R \log \frac{n_A}{n_A + n_B} + n_B R \log \frac{n_B}{n_A + n_B}] && (89)\\
&= -R[cR \log c + (1-c) R \log(1-c)] > 0 && (90)
\end{aligned}$$

最後の式変形では今の場合 1 モルについて考えているので $n_A + n_B = 1$、また $n_A = c, n_B = 1 - c$ であることを用いた。