平成15年度(1次募集)解答

市原耕太郎
解答確認者 川口賢二 斎藤高

平成17年6月30日

平成15年度(1次募集)

1 運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}m\{(\dot{x} + \dot{x_s})^2 + \dot{y}^2\} = \frac{1}{2}m\{l\dot{\theta}cos\theta + \dot{x_s})^2 + (l\dot{\theta}sin\theta)^2\} \tag{1}$$

ポテンシャルエネルギー V は

$$V = mgl(1 - cos\theta) \tag{2}$$

したがってラグランジュ関数 L は

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\{l\dot{\theta}cos\theta + \dot{x_s})^2 + (l\dot{\theta}sin\theta)^2\} - mgl(1 - cos\theta) \tag{3}$$

ここでオイラーーラグランジュの微分方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \tag{4}$$

を用いれば

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{x_s} + l\dot{\theta}cos\theta)lcos\theta + ml^2\dot{\theta}sin\theta^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mldot\theta\dot{x_s}sin\theta - mglsin\theta$$

となり式 (4) は

$$\frac{d}{dt}(l\dot{x_s}cos\theta + l^2\dot{\theta}) = -l\dot{\theta}\dot{x_s}sin\theta - glsin\theta$$

である。よって運動方程式は

$$(l\frac{d^2\theta}{dt^2} + gsin\theta) = -(\frac{d^2x_s}{dt^2})cos\theta \tag{5}$$

ここで角度変化が小さく、支点の運動が正弦振動

$$x_s = A_0cos\omega\mathrm{t}$$

と表せるとき式 (5) は

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + gsin\theta = \omega^2x_scos\theta \tag{6}$$

2

(1)

$$\begin{aligned} rot\vec{E} &= \vec{0} \qquad \text{(ファラデーの法則)} \qquad (7) \\ div\vec{D} &= \rho \qquad \text{(ガウスの法則)} \qquad (8) \\ div\vec{B} &= 0 \qquad \text{(ガウスの法則)} \qquad (9) \\ rot\vec{H} &= \vec{i} \qquad \text{(アンペールの法則)} \qquad (10) \end{aligned}$$

$\vec{i}$:電流密度 $\vec{E}$:電場 $\vec{D}$:電束密度 ρ : 電荷密度 $\vec{B}$:磁場 $\vec{H}$:磁束密度

(2)　普通の式

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (11)$$

内容：磁束の時間変化に等しい逆起電力がコイルに発生する。

微分形式

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (12)$$

内容：磁場の時間変化によって磁場と垂直方向に電場が生じる。

(3)

式 (10) は連続の方程式

$$\mathrm{div}\vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (13)$$

に矛盾する。

証明：式 (10) の両辺に div を作用させると

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{H}) = \mathrm{div}\vec{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

右辺は定常電流でない限り 0 とはなり得ない。

(4)

マクスウェルは式 (10) の右辺に電束密度の時間微分を追加して

$$rot\vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (14)$$

とした。
証明：式(14)の両辺にdivを作用させると

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{H}) = \mathrm{div}(\vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = \mathrm{div}\vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\therefore \qquad 0 = \mathrm{div}\vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

となり、矛盾が解ける。
(5)

1888年のヘルツの実験で電磁波の存在で実証され、変位電流の存在も確かめられた。

(6)
波動方程式は

$$\triangle \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \tag{15}$$

電波速度は

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{3.374 \times 10^{-9}} = 3.00 \times 10^8 \qquad (m/s)$$

3

(1)

$$[q,p]=i\hbar \qquad [q,q]=0 \qquad [p,p]=0 \tag{16}$$

(2)

$$p=-i\hbar\frac{\partial}{\partial q} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}[q,p]\Psi &= -i\hbar q\frac{\partial \Psi}{\partial q}+i\hbar\Psi+i\hbar q\frac{\partial \Psi}{\partial q}=i\hbar\Psi \\ &\therefore [q,p]=i\hbar\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}[a,a^\dagger] &= \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q+\frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}p, \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q-\frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}p\right] \\ &= \frac{i}{2\hbar}[p,q]-\frac{i}{2\hbar}[q,p] \\ &= 1\end{aligned} \tag{18}$$

(4)

$$\begin{aligned}a^\dagger a &= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q-\frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}p\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q+\frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}p\right) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega}H-\frac{1}{2} \\ &\therefore H=\hbar\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2})\end{aligned} \tag{19}$$

(5)

$$\begin{aligned}[H,a^\dagger] &= [\hbar\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2}),a^\dagger] \\ &= \hbar\omega[a^\dagger a,a^\dagger] \\ &= \hbar\omega a^\dagger\end{aligned} \tag{20}$$

(6)

$$H(a^\dagger|0\rangle)=\hbar\omega(1+\frac{1}{2})(a^\dagger|0\rangle) \tag{21}$$

つまり $a^\dagger$ は $\hbar\omega$ だけエネルギーを上げる演算子。
よって

$$H|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle \tag{22}$$

(7)

$$\begin{aligned} a(a^\dagger)^n &= [a, a^\dagger](a^\dagger)^{n-1} + a^\dagger a(a^\dagger)^{n-1} \\ &\vdots \\ &= n(a^\dagger)^{n-1} + (a^\dagger)^n a \\ &\therefore [a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1} \end{aligned} \tag{23}$$

(8)

$$\begin{aligned} \langle n|n\rangle &= \langle 0|a^n \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle \\ &= \frac{1}{n!}\langle 0|a^{n-1}a(a^\dagger)^n|0\rangle \\ &= \frac{1}{n!}\langle 0|a^{n-1}n(a^\dagger)^{n-1}|0\rangle \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\langle 0|a^{n-1}(a^\dagger)^{n-1}|0\rangle \\ &\vdots \\ &= 1 \end{aligned} \tag{24}$$

(9)

$$\begin{aligned} [a_j, a_k^\dagger] &= \delta_{jk} \\ [a_j, a_k] &= 0 \\ [a_j^\dagger, a_k^\dagger] &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

(10) (4) と同様に考えると

$$H = \sum_{j=1}^{2} \hbar\omega_j (a_j^\dagger a_j + \tfrac{1}{2}) \tag{26}$$

(11) エネルギー固有値は

$$E = \sum_{j=1}^{2} \hbar\omega_j (n_j + \tfrac{1}{2}) \tag{27}$$

規格化された固有状態は

$$|n\rangle|m\rangle = \frac{(a_j^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\frac{(a_k^\dagger)^m}{\sqrt{m!}}|0\rangle \tag{28}$$

(12)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}\text{が有理数} \tag{29}$$

(13)

$$n+1 \tag{30}$$

(14)

$$|n-m\rangle|m\rangle = \frac{(a^\dagger)^{n-m}}{\sqrt{(n-m)!}}\frac{(b^\dagger)^m}{\sqrt{(m)!}}|0\rangle \tag{31}$$

(15) $[a, bc] = b[a, c] + [a, b]c$ を用いて計算すると

$$\begin{aligned} [J^3, J^\pm] &= J^\pm \\ [J^+, J^-] &= 2J^3 \end{aligned} \tag{32}$$

(16) (15) と同様に計算すると

$$\begin{aligned} [J, J^3] &= 0 \\ [J, J^\pm] &= 0 \end{aligned} \tag{33}$$

(17) n=2 の場合には 3 重の縮退が生じており、固有状態は

$$\begin{aligned} |3\rangle &= |0\rangle|2\rangle \\ |2\rangle &= |1\rangle|1\rangle \\ |1\rangle &= |2\rangle|0\rangle \end{aligned} \tag{34}$$

(18)

$$\begin{aligned} J^+|3\rangle &= a_1^\dagger a_2|0\rangle|2\rangle \\ &= |1\rangle|1\rangle \\ &= |2\rangle \end{aligned} \tag{35}$$

$$J^+|2\rangle = a_1^\dagger a_2|1\rangle|1\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= |2\rangle|0\rangle \\
&= |1\rangle & (36) \\
J^+|1\rangle &= a_1^\dagger a_2|2\rangle|0\rangle \\
&= 0 & (37) \\
J^-|3\rangle &= a_2^\dagger a_1|0\rangle|2\rangle \\
&= 0 & (38) \\
J^-|2\rangle &= a_2^\dagger a_1|1\rangle|1\rangle \\
&= |0\rangle|2\rangle \\
&= |3\rangle & (39) \\
J^-|1\rangle &= a_2^\dagger a_1|2\rangle|0\rangle \\
&= |1\rangle|1\rangle \\
&= |2\rangle & (40)
\end{aligned}
$$

(19)

$$
\rho(J) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rho(J^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$
$$
\rho(J^+) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(J^-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (41)
$$

4

(1)

1 個の調和振動子のハミルトニアンは

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{q}^2}{2} \tag{42}$$

よって古典的な 1 個の振動子の分配関数 Z_1 は

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{H_0}{2kT}} \frac{d^3p d^3q}{h} \\
&= \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\vec{p}^2}{2mkT}} d^3p \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega^2\vec{q}^2}{2kT}} d^3q \\
&= \frac{1}{h}\left(\sqrt{2\pi mkT}\sqrt{\frac{2\pi kT}{m\omega^2}}\right)^3 \\
&= \left(\frac{2\pi kT}{h\omega}\right)^3 \\
&= \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^3
\end{aligned}$$

求める分配関数 Z_c は N 個の振動子の場合なので

$$\therefore \quad Z_c = Z_1^N = \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^{3N} \tag{43}$$

(2)

量子力学的な 1 個の振動子の分配関数 Z_2 は

$$\begin{aligned}
Z_2 &= \sum_n e^{\frac{\epsilon_n}{kT}} \\
&= \sum_{n_x} e^{-\hbar\omega\frac{n_x+\frac{1}{2}}{kT}} \sum_{n_y} e^{-\hbar\omega\frac{n_y+\frac{1}{2}}{kT}} \sum_{n_z} e^{-\hbar\omega\frac{n_z+\frac{1}{2}}{kT}} \\
&= e^{-\frac{3\hbar\omega}{2kT}}\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}\right)^3 \\
&= \left(\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{2kT}} - e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}\right)^3 \\
&= \left(\frac{1}{2\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)}\right)^3
\end{aligned} \tag{44}$$

量子力学的な N 個の振動子の分配関数 Z_q は

$$Z_q = Z_2^N = \left(\frac{1}{2\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)}\right)^{3N} \tag{45}$$

(3)

$\hbar \ll 1$ として式 (45) の $2\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$ をテイラー展開すると

$$2\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \approx \frac{\hbar\omega}{kT}$$

よって量子力学的な振動子の分配関数 Z_q は

$$\begin{aligned} Z_q &\simeq \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^{3N} \\ &= Z_c \end{aligned} \tag{46}$$

つまり古典的な振動子の分配関数と等しくなる。

(4)

この時ハミルトニアン H は式 (42) を用いて

$$H = H_0 - e\vec{E}\cdot\vec{r} \tag{47}$$

分配関数 Z は

$$\begin{aligned} Z &= \int d\vec{r}d\vec{p}e^{-\frac{H}{kT}} \\ &= \int d\vec{r}d\vec{p}e^{-\frac{1}{kT}(H_0 - e\vec{E}\cdot\vec{r})} \end{aligned} \tag{48}$$

ここで $\partial Z/\partial\vec{E}$ を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial\vec{E}} &= \frac{e}{kT}\int d\vec{r}d\vec{p}\vec{r}e^{-\frac{1}{kT}(H_0 - e\vec{E}\cdot\vec{r})} \\ &= \frac{e}{kT}\langle\vec{r}\rangle \\ \therefore\ \vec{P} &= kT\frac{\partial Z}{\partial\vec{E}} \end{aligned} \tag{49}$$

5

(ア) $\frac{1}{2}mv^2$

(イ) $h\nu$

(ウ) mv

(エ) $\frac{h}{\lambda}$

(オ) ドブロイ波

(カ) ドブロイ波長

(キ) $\frac{h}{mv}$

(ク) $\frac{v}{2}$

(ケ) v

(コ) $\frac{2\pi a}{n}$

(サ) $\frac{x}{\lambda}$

(シ) $px - Et$

(ス) E

(セ) x

(ソ) $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$