平成１５年度
信州大学院工学系研究科博士前期課程
物質基礎科学専攻（第２次）入試問題解答例*

作成者　　西村　宗基

チェック者　　宮澤　寛史

*解答例は参考として見て下さい

平成１５年　２次入試問題解答例

$\boxed{1}$ 半径 R の固定された円柱の内面に沿ったころがる、質量 M で半径あの一様な円柱の運動を考えてみよう。

問題下の図のように円筒と円柱の両方の中心を結ぶ直線と鉛直線とのなす角を θ とする。円柱の中心並進速度 v は、

$$\mathrm{v} = (R-a)\dot{\theta} \tag{1}$$

また、円柱の軸のまわりの回転の角速度 ω は、

$$\omega = \frac{R}{a}\theta \tag{2}$$

円柱の軸の周りの慣性モーメント I は、

$$I = \frac{1}{3}Ma^3 \tag{3}$$

円柱の中心の運動エネルギー T は並進運動エネルギーと回転運動エネルギーの和であるから、

$$T = \frac{1}{6}M\dot{\theta}^2\{a^3 + 3(R-a)\} \tag{4}$$

と表される。

また、ポテンシャルエネルギー V は、

$$V = MgR - (R-a)\cos\theta \tag{5}$$

となる。したがって、この円柱の運動のラグランジアン L は、

$$L = \frac{1}{6}M\dot{\theta}^2\{a^3 + 3(R-a)\} + Mg\{(R-a)\cos\theta - R\} \tag{6}$$

と表される。したがって、このラグランジュの運動方程式を解くと円柱の運動方程式

$$M\ddot{\theta} = \frac{3(a-R)}{a^3 + 3(R-a)^2}\sin\theta \tag{7}$$

が得られる。これから、この円柱の運動は、長さ ℓ が、

$$\ell = \frac{a^3 + 3(R-a)^2}{3(R-a)} \tag{8}$$

の単振り子の振動と同じであることが分かる。

$\boxed{2}$ （１）$Q(t), I(t), V_0$ の関係より、

$$\begin{aligned} RI(t) + \frac{Q(t)}{C} &= V_0 \\ R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I &= 0 \\ \int \frac{1}{I}dI + \int \frac{1}{RC}dt &= 0 \end{aligned}$$

よって、

$$I = e^{-\left(\frac{1}{RC}t - C\right)} = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad (I_0 = e^C) \tag{9}$$

$t = 0$ で、$Q = 0$ よって $I_0 = \frac{V_0}{R}$

$$Q = \int_0^t I dt = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \tag{10}$$

（２）$V_0 = 0$ と考えて $RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0$ 　　　よって

$$I = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

ジュール熱Wは

$$\mathrm{W} = \int RI^2 dt = \frac{CV_0^2}{2} \tag{11}$$

（３）$Q(t), I(t), V_0$ の関係より、

$$\begin{aligned} L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) &= V_0 \\ L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

$t = 0$ で $I = 0$ より、

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad \text{（グラフ省略）} \tag{12}$$

（４）$V_0 = 0$ と考えて $L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = 0$ 　　　よって $I = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$

ジュール熱Wは

$$\mathrm{W} = \int RI^2 dt = \frac{V_0^2 L}{2R} \tag{13}$$

（５）省略

$\boxed{3}$

（１）

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi \tag{14}$$

（２）（１）は、

$$\begin{aligned}\left[-\frac{p^2}{2m}+V(x)\right]\psi(x) &= E\psi(x)\\ \frac{p^2}{2m}\psi(x) &= (E-V(x))\psi(x)\end{aligned}$$

とかける。

$$\langle\psi|p^2|\psi\rangle = \langle p\psi|p\psi\rangle = ||p\psi\rangle|^2 \geq 0$$

より、$E \geq V(x)$. よって $V(x) \geq V(x)_{\mathrm{min}}$ ならば、

$$E \geq V_{\mathrm{min}} \tag{15}$$

（３）$\psi(\pm a)=0$ （４）$E>0$ より、$k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}$ とすると、（１）式は箱の中では

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi + k^2\psi = 0 \tag{16}$$

一般解は

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx \tag{17}$$

（５）$x=\pm a$ での境界条件より、

$$\begin{cases} A\sin ka + B\cos ka = 0 \\ -A\sin ka + B\cos ka = 0 \end{cases}$$

(i)　A、B両方０とすると、$\psi=0$ となるから、規格化条件にあわない。

(ii)　$A=0, B\neq 0$ の場合

$$\cos ka = 0 \quad よって\ ka = \frac{2n-1}{2}\pi \quad (n=1,2,3\cdots)$$

(iii) $A\neq 0, B=0$ の場合

$$\sin ka = 0 \quad よって\ ka = n\pi \quad (n=1,2,3\cdots)$$

$$まとめると、ka = \frac{n}{2}\pi \quad (n=1,2,3\cdots)$$

よって、エネルギー固有値は、

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \tag{18}$$

（６）一般に $\psi_n(x)$ は

$$\psi_n(x) = \begin{cases} A_n \sin\frac{n\pi}{2a}x & (n:\text{偶数}) \\ B_n \cos\frac{n\pi}{2a}x & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

規格化すると、

$$\int_{-a}^{a} |\psi(x)|^2 dx = |A_n|^2 = a|A_n|^2 = 1$$

同様に B_n も規格化して、

$$A_n = B_n = a^{-\frac{1}{2}} \tag{19}$$

（７）

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \qquad (b < |x| < a) \tag{20}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi \qquad (|x| < b) \tag{21}$$

（８）

$$\psi(\pm a) = 0$$

（９）$\epsilon \longrightarrow 0$ のとき

$$\psi(b+\epsilon) = \psi(b-\epsilon), \quad \psi(-b+\epsilon) = \psi(-b-\epsilon), \quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{b+\epsilon} = \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{b-\epsilon}, \quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{-b+\epsilon} = \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{-b-\epsilon}$$

（１０）

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \qquad (b < x < a) \tag{22}$$

（２）より、$E > 0$ なので

$$\psi_I(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

$$a = 0 \text{ より } \psi(x) = C\sin k(x-a) \tag{23}$$

（１１）

$$\psi_{III}(x) = \psi_I(-x)$$

（１２）

(i) $V_0 > E > 0$ のとき

$$\psi"_{II} + q^2\psi_{II} = 0$$

$$\text{また偶関数より}\psi_{II}(x) = A\cos qx \qquad (q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} > 0)$$

(ii) $V_0 < E$ のとき

$$\psi"_{II} - \kappa^2\psi_{II} = 0$$

$$\text{また偶関数より}\psi_{II}(x) = A\cosh kx \qquad (\kappa^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} > 0)$$

（１３）

(i) $V_0 > E > 0$ のとき境界条件で連立させて

$$q\tan k(b-a) = -k\cot qb$$

(ii) $V_0 < E$ のとき境界条件で連立させて

$$\kappa\tan k(b-a) = k\coth\kappa b$$

$\boxed{4}$ [一.]

（１）図省略

（２）吸収する熱量を A $\longrightarrow$ B(等温過程),B $\longrightarrow$ C（等積過程）, C $\longrightarrow$ D(等温過程),$D \longrightarrow A$(等積過程) それぞれの過程で $Q_{AB}, Q_{BC}, Q_{CD}, Q_{DA}$ とする。作業物質が理想気体であることから、$PV = RT$.

U を内部エネルギーとすると低積比熱は $C_V = \frac{dU}{dT}$ を用いて $(T_1 > T_2, V_2 > V_1)$

$$\begin{aligned}
Q_{AB} &= \int_{V_1}^{V_2} PdV = RT_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}dT = RT_1\log\frac{V_2}{V_1} \quad > 0 \\
Q_{BC} &= \int_{B}^{C} dU = C_V\int_{T_1}^{T_2} dT = C_V(T_2 - T_1) \quad < 0 \\
Q_{CD} &= \int_{V_2}^{V_1} PdV = RT_2\int_{V_2}^{V_1}\frac{1}{V}dT = -RT_2\log\frac{V_2}{V_1} \quad < 0 \\
Q_{DA} &= \int_{D}^{A} dU = C_V\int_{T_2}^{T_1} dT = C_V(T_1 - T_2) \quad > 0
\end{aligned}$$

１サイクルで気体がする仕事は $W = Q_{AB} + Q_{CD}$ より、熱効率 η は、

$$\eta = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{AB}} = \frac{(T_1 - T_2) R \log \frac{V_2}{V_1}}{R T_1 \log \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \tag{24}$$

[二.]

(1) 一次元調和振動子の場合

$$< q^2 >_{AV} = \frac{kT}{4\pi^2 m \upsilon^2}$$

(2) 三次元調和振動子の場合

$$< q_x^2 >_{AV} = < q_y^2 >_{AV} = < q_z^2 >_{AV} = \frac{1}{3} < q'^2 >_{AV}$$

$$< q'^2 >_{AV} = 3 < q^2 >_{AV} = \frac{3kT}{4\pi^2 m \upsilon^2}$$

$\boxed{5}$ （ア）原子核　（イ）光（電子波）（ウ）減少

（エ）$m\frac{\upsilon^2}{r} = (m\upsilon\omega)$　（オ）$\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{e^2}{mr^2}$　（カ）$-\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$　（キ）$-\frac{e^4}{12\pi^2\epsilon_0^2 c^3 m^2 r^2}$

（ク）$-\frac{4\pi^2\epsilon_0^2 c^3 m^2}{r_0^3 e^4}$　（キ）1.6×10^{-11}