# 過去問の解答

高畠信弘　　Nobuhiro Takabatake [1]

2005年5月31日

[1]check者　　市原　　斎藤

# 平成16年度(1次募集)

## $\boxed{1}$

## 問1

(a)

質点 $1,2$ の進む座標を釘→質点 $1,2$ →地面の向きに、$X,Y$ とする。質点 $1,2$ に働く垂直抗力の大きさをを $N_1,N_2$ とすると

$$N_1 = m_1 g \cos\theta_1 \tag{1.1}$$

$$N_2 = m_2 g \cos\theta_2 \tag{1.2}$$

と、書ける。
また、質点 $1,2$ に働く摩擦力の大きさを $f'_1, f'_2$ とすると

$$f'_1 = \mu'_1 N_1 = \mu'_1 m_1 g \cos\theta_1 \tag{1.3}$$

$$f'_2 = \mu'_2 N_2 = \mu'_2 m_2 g \cos\theta_2 \tag{1.4}$$

と、書ける。
Newton's eq. は

$$m_1 \frac{d^2X}{dt^2} = m_1 g \sin\theta_1 - \mu'_1 m_1 g \cos\theta_1 - T \tag{1.5}$$

$$m_2 \frac{d^2Y}{dt^2} = m_2 g \sin\theta_2 + \mu'_2 m_2 g \cos\theta_2 - T \tag{1.6}$$

ここで、$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{d^2Y}{dt^2}$ なので、(1.6) 式は、

$$m_2 \frac{d^2X}{dt^2} = -m_2 g \sin\theta_2 - \mu'_2 m_2 g \cos\theta_2 + T \tag{1.7}$$

(1.5)+(1.7) より、

$$(m_1+m_2)\frac{d^2X}{dt^2} = m_1 g \sin\theta_1 - \mu'_1 m_1 g \cos\theta_1 - m_2 g \sin\theta_2 - \mu'_2 m_2 g \cos\theta_2 \tag{1.8}$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{m_1 g(\sin\theta_1 - \mu'_1 \cos\theta_1) - m_2 g(\sin\theta_2 + \mu'_2 \cos\theta_2)}{m_1+m_2} \tag{1.9}$$

(b)
滑車と質点 1, 2 との間に働く張力を $T_1, T_2$ とすると
Newton's eq.

$$m_1\frac{d^2X}{dt^2} = m_1 g\sin\theta_1 - \mu_1' m_1 g\cos\theta_1 - T_1 \tag{1.10}$$

$$m_2\frac{d^2Y}{dt^2} = m_2 g\sin\theta_2 + \mu_2' m_2 g\cos\theta_2 - T_2 \tag{1.11}$$

$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{d^2Y}{dt^2}$ なので、(1.11) は

$$m_2\frac{d^2X}{dt^2} = -m_2 g\sin\theta_2 - \mu_2' m_2 g\cos\theta_2 + T_2 \tag{1.12}$$

と、書ける。また、滑車の回る向きを $\theta$ とすると、

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\frac{d\omega}{dt} = aT_1 - aT_2 \tag{1.13}$$

と、書ける。また、糸が滑らないので

$$\frac{d^2X}{dt^2} = a\frac{d\omega}{dt} \tag{1.14}$$

(1.10) + (1.12)

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)\frac{d^2X}{dt^2} &= m_1 g\sin\theta_1 - \mu_1' m_1 g\cos\theta_1 \\ &\quad -m_2 g\sin\theta_2 - \mu_2' m_2 g\cos\theta_2 \\ &\quad +T_2 - T_1\end{aligned} \tag{1.15}$$

(1.13) より、$T_2 - T_1 = -\frac{Id\omega}{adt}$

また、(1.13) より、$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2X}{adt^2}$ なので、

$T_2 - T_1 = -\frac{Id^2X}{a^2dt^2}$ を (1.15) に代入し、整理すると

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{g}{(m_1+m_2)+\frac{2}{a^2}}[m_1(\sin\theta_1 - \mu_1'\cos\theta_1) - m_2(\sin\theta_2 + \mu_2'\cos\theta_2)] \tag{1.16}$$

問 2
2 次元平面での微小変位を $ds$ とすると、三平方の定理より、

$$ds^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 \tag{1.17}$$

より、速さ $v$ は、

$$v^2 = (\frac{ds}{dt})^2 = (\frac{dr}{dt})^2 + (\frac{rd\theta}{dt})^2$$
$$= (\frac{dr}{dt})^2 + r^2(\frac{d\theta}{dt})^2 \tag{1.18}$$

運動エネルギーを $T$ とすると、

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2 + \frac{1}{2}mr^2(\frac{d\theta}{dt})^2 \tag{1.19}$$

ポテンシャルエネルギーは $r$ のみの関数 $U(r)$ とすると、ラグランジアン $L$ は

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2 + \frac{1}{2}mr^2(\frac{d\theta}{dt})^2 - U_{(r)} \tag{1.20}$$

オイラー、ラグランジの運動方程式は

$$\frac{\partial Ł}{\partial \frac{d\theta}{dt}} = mr^2(\frac{d\theta}{dt})^2(= P_\theta) \tag{1.21}$$
$$\frac{\partial Ł}{\partial \theta} = 0 \tag{1.22}$$

より、

$$\frac{d}{dt}(mr^2\frac{d\theta}{dt}) = \frac{d}{dt}(P_\theta) = 0 \tag{1.23}$$

より、$P_\theta =$ 一定、($P_\theta$ は角運動量)

# 2

(1)
キルヒホッフ第二法則より、

$$V - IR - \frac{Q}{C} = 0 \tag{2.1}$$

直流なので、$\frac{dV}{dt} = 0$
(2.1) を、時間で微分すれば、

$$R \quad \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = 0 \tag{2.2}$$

$$R \quad \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0 \tag{2.3}$$

なので、

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{CR}I \tag{2.4}$$

(2.4) の微分方程式を解くと、

$$\int \frac{dI}{I} \quad = \quad -\frac{1}{CR}\int dt + c_1 \qquad (c_1 : \text{定数}) \tag{2.5}$$

$$I \quad = \quad A\exp\left(-\frac{t}{CR}\right) \qquad (A : \text{定数}) \tag{2.6}$$

初期条件 $t = 0$ で、$Q = 0$ なので、$V - I_{(0)}R = 0$ より、$I_{(0)} = \frac{V}{R}$ を使うと、(2.6) は、

$$I_{(0)} = A = \frac{V}{R} \tag{2.7}$$

$$I = \frac{V}{R}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right) \tag{2.8}$$

(2)
(1) より、

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right) \tag{2.9}$$

この微分方程式を解くと

$$\int dQ \quad = \quad \frac{V}{R}\int \exp\left(-\frac{t}{CR}\right)dt + c_2 \qquad (c_2 : \text{定数}) \tag{2.10}$$

$$Q \quad = \quad -VC\exp\left(-\frac{t}{CR}\right) + c_2 \tag{2.11}$$

初期条件 $t=0$ で、$Q=0$ より、(2.11) は、$0=-VC+c_2$ で $c_2=VC$ なので、

$$Q = VC\left(1-\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)\right) \tag{2.12}$$

極板の面積 $S$ は $\pi a^2$ なので、$E=\frac{Q}{S}$ より、

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{VC}{\pi\epsilon_0 a^2}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)\right) \tag{2.13}$$

(3) アンペール・マクスウェルの法則

$$\int_c \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{i}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S} \tag{2.14}$$

極板間では、電流が流れないので、$|\mathbf{i}|=0$ より、
(2.14) 式の

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 2\pi r H && (2.15)\\
(\text{右辺}) &= \frac{\partial D}{\partial t}\int_S \mathbf{n}\cdot d\mathbf{S} && (2.16)\\
& && (2.17)
\end{aligned}$$

$(\mathbf{n}:\mathbf{D}$ の向きの単位ベクトル$)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{VC}{\pi a^2}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)\right)\right\} && (2.18)\\
&= \frac{V}{\pi R a^2}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right) && (2.19)
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
2\pi r H &= \frac{Vr^2}{a^2 R}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right) && (2.20)\\
H &= \frac{rV}{2\pi a^2 R}\exp -\left(\frac{t}{CR}\right) && (2.21)
\end{aligned}$$

(4)

ポインティングベクトルを $\mathbf{S}$ とすると、大きさ $|\mathbf{S}|$ は、
(2),(3) の $E,H$ の値より、

$$\begin{aligned}
|\mathbf{S}| &= |\mathbf{E}\times\mathbf{H}|\\
&= EH\\
&= \frac{VC}{\pi\epsilon_0 a^2}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)\right)\frac{V}{2\pi a R}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)\\
&= \frac{CV^2}{2\pi^2\epsilon_0 a^3 R}\left\{\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)-\exp\left(-\frac{2t}{CR}\right)\right\} && (2.22)
\end{aligned}$$

と、求められる。これより、側面から内部に流入する単位時間当りのエネルギー $u_{(t)}$ は

$$\begin{aligned} u_{(t)} &= \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} \\ &= |s| 2\pi a d \\ &= \frac{cdV^2}{\pi\epsilon_{(0)} a^2 R} \left\{ \exp\left( -\frac{t}{CR} - \exp\left( -\frac{2t}{CR} \right) \right) \right\} \end{aligned} \tag{2.23}$$

ここで $C = \frac{\pi\epsilon_(0)a^2}{d}$ より、

$$u_{(t)} = \frac{V^2}{R} \left\{ \exp\left( -\frac{t}{CR} - \exp\left( -\frac{2t}{CR} \right) \right) \right\} \tag{2.24}$$

これより、時間 $t$ での、エネルギー $U_{(t)}$ は、

$$\begin{aligned} U_{(t)} &= \int_0^t u_{(t')} dt' \\ &= \frac{V^2}{R} \int_0^t \left\{ \exp\left( -\frac{t'}{CR} - \exp\left( -\frac{2t'}{CR} \right) \right) \right\} dt' \\ &= \frac{CV^2}{2} \left( 1 - \exp\left( -\frac{t}{CR} \right) \right)^2 \end{aligned} \tag{2.25}$$

また、$U = \frac{Q^2}{2C}$ に (2) の $Q$ を代入すると、

$$\begin{aligned} U_{(t)} &= \frac{Q^2_{(t)}}{2C} \\ &= \frac{CV^2}{2} \left( 1 - \exp\left( -\frac{t}{CR} \right) \right)^2 \end{aligned} \tag{2.26}$$

となり、示せた。

$\boxed{3}$

(1)

$$Schr\ddot{o}dinger eq.$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_{(x,t)} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{(x)}\right)\psi_{(x,t)} \tag{3.1}$$

複素共役を取ると、

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*_{(x,t)} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{(x)}\right)\psi^*_{(x,t)} \tag{3.2}$$

(2)

(3.1) 式に右から $\psi^*$ を (3.2) 式に左から $\psi$ を乗じると、

$$i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi\right)\psi^* = \left\{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{(x)}\right)\psi\right\}\psi^* \tag{3.3}$$

$$-i\hbar\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = \psi\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{(x)}\right)\psi^* \tag{3.4}$$

(3.3)−(3.4) より、

$$i\hbar\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^* + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\psi^* + \frac{\hbar^2}{2m}\psi\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi\psi^*) - i\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right) = 0 \tag{3.6}$$

ここで、$\psi\psi^* = \rho, \mathbf{J} = -i\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)$ なので

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{J}}{\partial x} = 0 \tag{3.7}$$

(3)

確立の流れの式を全世界 $(-\infty < x < \infty)$ で積分すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} dx\rho + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}dx\mathbf{J} = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_{(x,t)}|^2 dx = -\Big(\mathbf{J}_(\infty,t) - \mathbf{J}_(\infty,t)\Big) \tag{3.9}$$

$x \to \infty$ で、$\psi, \psi^* \to 0 \to \mathbf{J}_{(\infty,t)}, \mathbf{J}_{(-\infty,t)} \to 0$ より、

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi_{(x,t)}|^2 = 0 \tag{3.10}$$

(4)

$Schrödinger eq.$ に、$\psi_{(x,t)} = T_{(t)}\Phi_{(x)}$ を代入し、$\psi_{(x,t)}$ で割ると、

$$i\hbar\frac{1}{T_{(t)}}\frac{\partial}{\partial t}T(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Phi_{(x)}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_{(x)} + V(x) \tag{3.11}$$

ここで、(左辺) = (右辺) = $E$ ($E$ は定数) とおくと、
$i\hbar\frac{1}{T_{(t)}}\frac{\partial}{\partial t}T_{(t)} = E$ なので、これを、解くと、

$$T = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \tag{3.12}$$

なので、$\Phi_{(x)}$ が、従う微分方程式は

$$\frac{\partial^2\Phi_{(x)}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V_{(x)}\right)\Phi_{(x)} = 0 \tag{3.13}$$

(5)

(3.13) の複素共役をとると、

$$\frac{\partial^2\Phi^*_{(x)}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E^* - V_{(x)}\right)\Phi^*_{(x)} = 0 \tag{3.14}$$

$\psi_{(x,t)} = \Phi_{(x)}\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ より

$$\begin{aligned}\rho &= \Phi_{(x)}\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)\Phi^*_{(x)}\exp\left(\frac{iEt}{\hbar}\right)\\ &= \Phi_{(x)}\Phi^*_{(x)}\end{aligned} \tag{3.15}$$

なので、$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ 故に、$\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial x} = 0$
$\mathbf{J}$ の式と (3.13) と (3.14) を使って、$\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial x} = 0$ を解くと

$$\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial x} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\Phi^*\frac{2m}{\hbar^2}\left(V_{(x)} - E\right)\Phi - \frac{2m}{\hbar^2}\left(V_{(x)} - E^*\right)\Phi^*\Phi\right)(= 0) \tag{3.16}$$

$\therefore$

$$\frac{2m}{\hbar^2}\left\{\left(V_{(x)} - E\right) - \left(V_{(x)} - E^*\right)\right\}\Phi^*\Phi = 0$$

$$E = E^* \tag{3.17}$$

なので、$E$ は定数

$\boxed{4}$

(1)

$$
\begin{aligned}
Z_N &= \sum_{m_1=-J}^{J}\sum_{m_2=-J}^{J}\cdots\sum_{m_N=-J}^{J}\exp\left(+\beta\sum_i g\mu_\beta m_i H\right) \\
&= \sum_{m_1=-J}^{J}\sum_{m_2=-J}^{J}\cdots\sum_{m_N=-J}^{J}\prod_{i=1}^{N}\exp\left(\beta g\mu_\beta m_i H\right) \\
&= \sum_{m_1=-J}^{J}\exp\left(\beta g\mu_\beta m_1 H\right)\sum_{m_2=-J}^{J}\exp\left(\beta g\mu_\beta m_2 H\right)\cdots\sum_{m_N=-J}^{J}\exp\left(\beta g\mu_\beta m_N H\right) \\
&= \left(\sum_{m=-J}^{J}\exp\left(\beta g\mu_\beta m H\right)\right)^N \\
&= Z_1^N
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
< M > &= \frac{1}{Z_N}\sum_{m_1=-J}^{J}\sum_{m_2=-J}^{J}\cdots\sum_{m_N=-J}^{J}\sum_{i=1}^{N} g\mu_\beta m_i\prod_{j=1}^{N}\exp\left(\beta g\mu_\beta m_i H\right) \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} g\mu_\beta \sum_{m_1=-J}^{J}\sum_{m_2=-J}^{J}\cdots\sum_{m_N=-J}^{J} m_i\prod_{j=1}^{N}\exp\left(\beta g\mu_\beta m_i H\right)}{\displaystyle\sum_{m_1=-J}^{J}\sum_{m_2=-J}^{J}\cdots\sum_{m_N=-J}^{J}\prod_{j=1}^{N}\exp\left(\beta g\mu_\beta m_i H\right)} + i = 2\cdots N \text{ の項} \\
&= g\mu_\beta\frac{\displaystyle\sum_{m_1=-J}^{J} m_1\exp\left(\beta g\mu_\beta m_1 H\right)}{\displaystyle\sum_{m_1=-J}^{J}\exp\left(\beta g\mu_\beta m_1 H\right)} + g\mu_\beta\frac{\displaystyle\sum_{m_2=-J}^{J} m_2\exp\left(\beta g\mu_\beta m_2 H\right)}{\displaystyle\sum_{m_2=-J}^{J}\exp\left(\beta g\mu_\beta m_2 H\right)} + \cdots \\
\cdots &\qquad + g\mu_\beta\frac{\displaystyle\sum_{m_N=-J}^{J} m_N\exp\left(\beta g\mu_\beta m_N H\right)}{\displaystyle\sum_{m_N=-J}^{J}\exp\left(\beta g\mu_\beta m_N H\right)} \\
&= Ng\mu_\beta\frac{\displaystyle\sum_{m=-J}^{J} m\exp\left(\beta g\mu_\beta m H\right)}{\displaystyle\sum_{m=-J}^{J}\exp\left(\beta g\mu_\beta m H\right)}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

ここで、

$$\frac{d}{d\beta}Z_1 = g\mu_\beta H \sum_{m=-J}^{J} m \exp\left(\beta g\mu_\beta m H\right) \tag{4.3}$$

より、

$$\begin{aligned} < M >= \frac{N}{H}\frac{1}{Z_1}\frac{dZ_1}{d\beta} &= \frac{N}{H}\frac{d}{d\beta}\ln Z_1 \\ &= N\frac{d}{d(\beta H)}\ln Z_1 \\ &= N\frac{d}{d(\beta H)}\ln Z_1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$Z_1$ は、

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\exp\left(-\beta g\mu_\beta m H\right)\left\{\exp\left(-\beta g\mu_\beta m H(2J+1) - 1\right)\right\}}{\exp\left(\beta g\mu_\beta m H\right) - 1} \\ &= \frac{\exp\left(\beta g\mu_\beta m H(J+1)\right) - \exp\left(-\beta g\mu_\beta m H J\right)}{\exp\left(\beta g\mu_\beta m H\right) - 1} \\ &= \frac{\exp\left(\beta g\mu_\beta m H\dfrac{2J+1}{2}\right) - \exp\left(-\beta g\mu_\beta m H\dfrac{2J+1}{2}\right)}{\exp\left(\dfrac{1}{2}\beta g\mu_\beta m H\right) - \exp\left(-\dfrac{1}{2}\beta g\mu_\beta m H\right)} \\ &= \frac{\sinh\left(\beta g\mu_\beta J m H\dfrac{2J+1}{2J}\right)}{\sinh\left(\dfrac{1}{2J}\beta g\mu_\beta J m H\right)} \end{aligned} \tag{4.5}$$

なので $< M >$ は、

$$< M >= \frac{\partial}{\partial(\beta H)}\ln\frac{\sinh\left(\beta g\mu_\beta J m H\dfrac{2J+1}{2J}\right)}{\sinh\left(\dfrac{1}{2J}\beta g\mu_\beta J m H\right)} \tag{4.6}$$

$$\eta = \frac{\sinh\left(\beta g\mu_\beta J m H\dfrac{2J+1}{2J}\right)}{\sinh\left(\dfrac{1}{2J}\beta g\mu_\beta J m H\right)} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \tag{4.7}$$

$$x = \beta H \tag{4.8}$$

とおくと、

$$< M > = N\frac{\partial}{\partial x}\ln\eta$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{N}{\eta}\frac{\partial}{\partial x}\eta \\
&= N\frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{g\mu_\beta J\frac{2J+1}{2J}\cosh\left(g\mu_\beta Jx\frac{2J+1}{2J}\right)\eta_1 - \frac{g\mu_\beta J}{2J}\cosh\left(\frac{g\mu_\beta Jx}{2J}\right)\eta_2}{\eta_1^2} \\
&= N\left\{g\mu_\beta J\frac{2J+1}{2J}\frac{\cosh\left(\beta g\mu_\beta JH\frac{2J+1}{2J}\right)}{\sinh\left(\beta g\mu_\beta JH\frac{2J+1}{2J}\right)} - \frac{g\mu_\beta J}{2J}\frac{\cosh\left(\frac{g\mu_\beta J\beta H}{2J}\right)}{\sinh\left(\frac{g\mu_\beta J\beta H}{2J}\right)}\right\} \\
&= \frac{2J+1}{2J}g\mu_\beta JN\coth\left(\beta g\mu_\beta JH\frac{2J+1}{2J}\right) - \frac{g\mu_\beta JN}{2J}\coth\left(\frac{g\mu_\beta J\beta H}{2J}\right)
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

(3)

$$
\beta = \frac{1}{k_\beta T} \ll 1 \qquad (T\text{ は高温}) \tag{4.10}
$$

なので、$< M >$ の coth の中身は $\ll 1$ なので、

$$
\coth_{(x)} \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \qquad (x \ll 1) \tag{4.11}
$$

の、近似式が使える。これによって、$< M >$ は、

$$
\begin{aligned}
< M >= g\mu_\beta NJ\Bigg\{&\frac{2J+1}{2J}\left(\frac{1}{\frac{2J+1}{2J}\beta g\mu_\beta HJ} + \frac{2J+1}{6J}\beta g\mu_\beta HJ\right) \\
&-\frac{1}{2J}\left(\frac{1}{\frac{1}{2J}\beta g\mu_\beta HJ} + \frac{1}{6J}\beta g\mu_\beta HJ\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< M >= g\mu_\beta NJ\Bigg\{&\frac{1}{\beta g\mu_\beta HJ} + \frac{1}{3}\left(\frac{2J+1}{2J}\right)^2\beta g\mu_\beta HJ \\
&-\frac{1}{\beta g\mu_\beta HJ} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2J}\right)^2\beta g\mu_\beta HJ\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= g\mu_\beta NJ\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2J}\right)^2\beta g\mu_\beta HJ\left\{(2J+1)^2 - 1\right\} \\
&= \frac{1}{3}\beta g^2\mu_\beta^2 NHJ(J+1)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

$\chi = \frac{\partial < M >}{\partial H}$ より、

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\partial < M >}{\partial H} &(4.13)\\ &= \frac{g^2 \mu_\beta^2 NHJ(J+1)}{3k_\beta T} &(4.14) \end{aligned}$$

で $< M >$ が $\frac{1}{T}$ に比例することが示せた。また、比例定数 $a$ は、

$$a = \frac{g^2 \mu_\beta^2 NHJ(J+1)}{3k_\beta} \tag{4.15}$$

(4)

(4.9) の $< M >$ と $g\mu_\beta J = \mu_0$ より、

$$\frac{< M >}{N} = \frac{2J+1}{2J}\mu_{(0)} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}\beta\mu_{(0)}H\right) - \frac{\mu_{(0)}}{2J}\coth\left(\frac{2J+1}{2J}\beta\mu_{(0)}H\right) \tag{4.16}$$

$J \to \infty$ で、$\frac{2J+1}{2J} = \left(1 + \frac{1}{2J}\right) \to 1$ なので、第 1 項は

$$(\text{第 1 項}) \to \mu_{(0)} \coth\left(\frac{\mu_{(0)}}{k_\beta T}\right) \tag{4.17}$$

また、$\frac{\beta\mu_{(0)}H}{2J}$ は $J \to \infty$ で、$\frac{\beta\mu_{(0)}H}{2J} \ll 1$ より、$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$ を使い、$J \to \infty$ を使うと、第二項は

$$\begin{aligned} (\text{第 2 項}) &\to \frac{\mu_{(0)}}{2J}\left(\frac{2J}{\beta\mu_{(0)}H} + \frac{\beta\mu_{(0)}H}{6J}\right) &(4.18)\\ &= \frac{k_{(\beta)}T}{H} &(4.19)\\ &\to \frac{k_\beta T}{H} &(4.20) \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\frac{< M >}{N} \to \mu_{(0)}\left(\coth\left(\frac{\mu_{(0)}H}{k_\beta T}\right) - \frac{k_\beta T}{\mu_{(0)}H}\right) \tag{4.21}$$

(5)

$$\begin{aligned} U &= F + TS &(4.22)\\ F &= -\frac{1}{\beta}\ln Z_N &(4.23)\\ S &= -\frac{\partial F}{\partial T} &(4.24) \end{aligned}$$

(4.9) と (4.24) より

$$F = -\frac{1}{\beta} N \ln \eta \tag{4.25}$$
$$= -k_\beta T N \ln \eta \tag{4.26}$$

(5.16) より $S$ は

$$S = -\left(-k_\beta N \ln \eta - k_\beta T N \frac{\partial}{\partial T} \ln \eta\right) \tag{4.27}$$

(4.23) より $U$ は

$$\begin{aligned} U &= F + TS \\ &= k_\beta T^2 N \frac{\partial}{\partial T} \ln \eta && (4.28) \\ &= N k_\beta T^2 \frac{\partial(\beta H)}{\partial T} \frac{\partial}{\partial(\beta H)} \ln \eta && (4.29) \\ &= N H \frac{\partial}{\partial(\beta H)} \ln Z_1 && (4.30) \\ &= -H < M > && (4.31) \end{aligned}$$

$C_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)$ より、

$$\begin{aligned} C_H &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H \\ &= \left(\frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_H && (4.32) \\ &= \frac{H}{k_\beta T^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{2J+1}{2J} g\mu_\beta N J \coth\left(\frac{2J+1}{2J} \beta g \mu_{\beta J H}\right) - \frac{g\mu_\beta N J}{2J} \coth\left(\frac{\beta g \mu_\beta H J}{2J}\right)\right\} \\ &= \frac{H}{k_\beta T^2} \left\{ \left(\frac{g\mu_\beta J}{2J}\right)^2 HN \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\beta g \mu_\beta H J}{2J}\right)} \right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{2J+1}{2J} g\mu_\beta J\right)^2 HN \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{2J+1}{2J} \beta g \mu_\beta H J\right)} \right\} && (4.33) \end{aligned}$$

$$= \frac{N}{k_\beta} \left(\frac{g\mu_\beta H}{2T}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\beta g \mu_\beta H J}{2J}\right)} - \frac{(2J+1)^2}{\sinh^2\left(\frac{2J+1}{2J} \beta g \mu_\beta H J\right)} \right\} \tag{4.34}$$

$\boxed{5}$

問 1

振動数が $\nu$ と $\nu + d\nu$ との間にある振動子の数は、波数 $k$ を使って $\nu = \frac{kc}{2\pi}$ と書けるので、この問題は $k$ と $k + dk$ の間にある振動子の個数を見出すのと同じ。
波数 $k$ を使うときに $l, m, n$ という座標を使うと

$$k_x = \frac{2\pi l}{L}, \qquad k_y = \frac{2\pi m}{L}, \qquad k_z = \frac{2\pi n}{L} \tag{5.1}$$

と書ける
**k**：波数ベクトルの大きさは $\frac{2\pi}{\lambda}$ で、整数の $l, m, n$ によって許される値をとる。($\lambda$ は波長) つまり、

$$\lambda = \frac{L}{l^2 + m^2 + n^2} \tag{5.2}$$

これより、$l, m, n$ 空間の単位立方当りに 1 個の振動子が存在する。つまり、この空間では、密度 1

$$\delta N_1 = dldmdn = \frac{V}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z \tag{5.3}$$

$k$ 空間においての極座標をとると、$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ と定義すれば、、体積要素は $k^2 dk d\Omega$ になる。$d\Omega$ は立体角要素、$d\Omega$ を積分すれば、$4\pi$ なので、

$$\delta N_1 = \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} k^2 dk \tag{5.4}$$

ここで、$\nu = \frac{kc}{2\pi}$ なので、

$$\delta N_1 = 4\pi V \frac{\nu^2 d\nu}{c^3} \tag{5.5}$$

これが、$\nu$ と $\nu + d\nu$ の区間内で **k** に許される値の個数である。各 **k** に対し、二つの偏りの方向に対応して、二個の独立な座標が存在するから、$\nu$ と $\nu + d\nu$ の間の振動子の全個数は、

$$\delta N = 2\delta N_1 = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \tag{5.6}$$

であることが分かる。
ここで $\delta N = P_\lambda, \qquad V = L^3$ で、$\nu = \frac{c}{\lambda}$ を使うと $\nu^2 = \left(\frac{c}{\lambda}\right)^2, \qquad d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$ なので、代入すると、また、積分範囲のことも考慮すると、

$$P_\lambda = \frac{8\pi L^3}{\lambda^4} d\lambda \tag{5.7}$$

となる。
問 2

$N_\lambda$ 個を $P_\lambda$ 個の箱に別けると考える。これは $N_\lambda$ 個を $p_\lambda$ー1 個の仕切りで分けたと考えて $N_\lambda + P_\lambda - 1$ 個を並べると考える。$N_\lambda$ 個と、仕切りの重複を考慮すると、

$$\omega_\lambda = \frac{(N_\lambda + P_\lambda - 1)!}{N_\lambda!(P_\lambda - 1)!} \tag{5.8}$$

問 3
$N_\lambda, P_\lambda \ll 1$ より問 2 の $\omega$ は

$$\omega_\lambda = \frac{(N_\lambda + P_\lambda)!}{N_\lambda! P_\lambda!} \tag{5.9}$$

と、書ける。
$W$ で $N_\lambda$ を $N_\lambda + \delta N_\lambda$ としたときの変分 $\delta W$ は
$Stiring$ の公式

$$\log(N!) \sim N(\log(N) - 1) \tag{5.10}$$

を使って

$$\begin{aligned} \log(W_{(N_\lambda)}) \sim & \sum_\lambda \{(N_\lambda + P_\lambda)(\log(N_\lambda + P_\lambda)) \\ & - (N_\lambda)(\log(N_\lambda)) - (P_\lambda)(\log(P_\lambda))\} \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} \log(W_{(N_\lambda)+\delta N_\lambda}) \sim & \sum_\lambda \{(N_\lambda + \delta N_\lambda + P_\lambda)(\log(N_\lambda + \delta N_\lambda + P_\lambda)) \\ & - (N_\lambda + \delta N_\lambda)(\log(N_\lambda + \delta N_\lambda)) - (P_\lambda)(\log(P_\lambda))\} \end{aligned} \tag{5.12}$$

ここで、

$$\log(N_\lambda + \delta N_\lambda + P_\lambda) \sim \log(N_\lambda + P_\lambda) + \frac{\delta N_\lambda}{N_\lambda + P_\lambda} \tag{5.13}$$

$$\log(N_\lambda + \delta N_\lambda) \sim \log(N_\lambda) + \frac{\delta N_\lambda}{N_\lambda} \tag{5.14}$$

を使うと、

$$\delta(\log W) = log(W_{(N_\lambda)+\delta N_\lambda}) - \log(W_{(N_\lambda)}) \tag{5.15}$$

$$= \sum_\lambda \{\log(N_\lambda + P_\lambda) - \log(N_\lambda)\}\delta N_\lambda \tag{5.16}$$

$\delta N_\lambda^2$ の項は無視した
また、$E = \sum_\lambda N_\lambda \epsilon_\lambda$ より $N_\lambda$ を $N_\lambda + \delta N_\lambda$ としたときの変分 $\delta E_\lambda$ は、$E$ =一定より

$$\delta E_\lambda = \sum_\lambda \epsilon_\lambda \delta N_\lambda = 0 \tag{5.17}$$

$Lagrange$ の未定乗数の方法より、
(5.16) $-\beta$(5.17) をつくって

$$\sum_\lambda \left( \log\left(\frac{N_\lambda + P_\lambda}{N_\lambda}\right) - \beta\epsilon_\lambda \right) \delta N_\lambda = 0 \tag{5.18}$$

また、$\delta N_\lambda$ は任意なので、

$$\log\left(\frac{N_\lambda + P_\lambda}{N_\lambda}\right) - \beta\epsilon_\lambda = 0 \tag{5.19}$$

$$\frac{N_\lambda + P_\lambda}{N_\lambda} = \exp(\beta\epsilon_\lambda) \tag{5.20}$$

より、

$$N_\lambda = \frac{1}{\exp(\beta\epsilon_\lambda) - 1} P_\lambda \tag{5.21}$$

問 4

$\frac{\beta hc}{\lambda}$ は $\lambda \to$ 小なので、0 のまわりで $Taylor$ 展開すると、

$$\exp\left(\frac{\beta hc}{\lambda}\right) \sim 1 + \frac{\beta hc}{\lambda} \tag{5.22}$$

を代入すると、

$$u_{(T,\lambda)} d\lambda \sim \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\frac{\beta hc}{\lambda}} d\lambda \tag{5.23}$$

$$= \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{1}{\beta} d\lambda \tag{5.24}$$

この式がレイリー · ジーンズの公式に一致するので、

$$\frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{1}{\beta} = \frac{8\pi}{\lambda^4} K_\beta T \tag{5.25}$$

なので、

$$\beta = \frac{1}{K_\beta T} \tag{5.26}$$

# $\boxed{6}$の 2

(1)

図とキルヒホッフ第 2 法則より、

$$\triangle V = -(i\omega L\triangle x)I \tag{6.1}$$

$$\triangle I = -\frac{V}{\frac{1}{i\omega c\triangle x}} \tag{6.2}$$

と、書ける

(2)

(6.1) 式 (6.2) 式をそれぞれ変形すると、

$$\frac{\triangle V}{\triangle x} = -i\omega LI \tag{6.3}$$

$$\frac{\triangle I}{\triangle x} = -i\omega CV \tag{6.4}$$

なので、$\triangle x \to 0$ の時、それぞれ

$$\frac{dV}{dx} = -i\omega LI \tag{6.5}$$

$$\frac{dI}{dx} = -i\omega CV \tag{6.6}$$

が導かれる。

(3)

$I$ を消去すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dx^2} &= -i\omega L\frac{dI}{dx} \\ &= -i\omega L(-i\omega CV) \\ &= -\omega^2 LCV \end{aligned} \tag{6.7}$$

$x = 0$ での $V = V_{(0)}$ として、

$$V = V_{(0)} \exp{(\pm i\omega\sqrt{LC}x)} \tag{6.8}$$

と書ける。

同様に $V$ を消去して、$x = 0$ での $I = I_{(0)}$ とすると

$$I = I_{(0)} \exp{(\pm i\omega\sqrt{LC}x)} \tag{6.9}$$

これを、(6.5) 式に代入すると、

$$\pm i\omega\sqrt{LC}V_{(0)}\exp\left(\pm i\omega\sqrt{LC}x\right) = -i\omega LI \tag{6.10}$$

$$V = \frac{-i\omega L}{\pm i\omega\sqrt{LC}}I \tag{6.11}$$

$$\frac{V}{I} = \mp\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{6.12}$$

より、特性インピーダンス $Z_{(0)}$ は

$$Z_{(0)} = \left|\frac{V}{I}\right| = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{6.13}$$

(4)
波数 $k$ を使って書ける平面波の解は

$$I_{(x,t)} = \left(A\exp\left(-ikx\right) - B\exp\left(ikx\right)\right)\exp\left(\imath\omega t\right) \tag{6.14}$$

と、書ける。(6.9) 式と比べると

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{6.15}$$

と書ける。
(5)

$R_1$ は反射波が逆方向なことより、75Ω の $\frac{3}{2}$ 倍程度と考えられる。また、$R_3$ は元の波形と同じようなこと化 75Ω と同程度の抵抗値と予想される。