平成16年度(2次募集)

三宅宏樹
解答確認者 宮澤

平成17年12月27日

平成 16 年度 (2 次募集) 力学

1

1

フックの法則より伸びる長さを d とすると

$$F_s = kd = mg \tag{1.1}$$

よって

$$d = \frac{mg}{k} \tag{1.2}$$

2

鉛直上向きに x 軸をとり、ばねが自然の長さになっている時の物体の位置をとして

$$mx'' = -kx - mg + f \tag{1.3}$$

最初、支えている時は、$x = 0$、$f = mg$ である。物体を離すと、$f = 0$ であるので、

$$mx'' = -kx - mg \tag{1.4}$$

$$y = x + \frac{mg}{k} \tag{1.5}$$

と、定義すると

$$my'' = -ky \tag{1.6}$$

これは、単振動の方程式で、初期値は

$$y = \frac{mg}{k} \tag{1.7}$$

$$y' = x' = 0 \tag{1.8}$$

なので

$$y = \frac{mg}{k} \cos (\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}} t \tag{1.9}$$

$$= x + \frac{mg}{k} \tag{1.10}$$

したがって、物体は中心を $x=-\frac{mg}{k}$、角振動数 $\omega=(\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}$、振幅 $\frac{mg}{k}$ の単振動を行なう。

3

運動エネルギー V は

$$V=\frac{1}{2}mx'^2=\frac{1}{2}m(-(\frac{m}{k})^{\frac{1}{2}}g\sin(\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}t)^2=\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k}\sin^2(\frac{k}{m}^{\frac{1}{2}})t \quad (1.11)$$

位置エネルギー U は

$$U=mgx=\frac{m^2g^2}{k}\cos(\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}t-\frac{m^2g^2}{k} \quad (1.12)$$

ばねに蓄えられているエネルギー K は

$$K=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k(\frac{mg}{k}\cos(\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}t-\frac{mg}{k})^2 \quad (1.13)$$

$$(1.14)$$

$$K=\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k}\cos^2(\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}t-\frac{m^2g^2}{k}\cos(\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}t+\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k} \quad (1.15)$$

よって、全エネルギー $E=V+U+K$ は

$$E=\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k}(\sin^2(\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}t+\cos^2(\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}t)+\frac{m^2g^2}{k}\cos(\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}t-\frac{m^2g^2}{k}\cos(\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}t-\frac{m^2g^2}{k}+\frac{m^2g^2}{k}=0 \quad (1.16)$$

よって、全エネルギーは時間 t に関係なく保存される。

4

$$L=T-U-K=\frac{1}{2}mx'^2-\frac{1}{2}kx^2-mgx \quad (1.17)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{dL}{dx'})-\frac{dL}{dx}=\frac{d}{dt}(mx')-kx-mg=mx''-kx-mg=0 \quad (1.18)$$

2

起電力 V_0 の電池と、抵抗 R を含む回路の P Q に最初 (a) のコンンデンサ（電気容量 C）と (b) のコイル（自己インダクタンス L）を接続し、(c) を接続して、スイッチを操作した。

１ はじめ（a）を接続した時、$t = 0$ でスイッチを A 側につないで、コンデンサを充電しはじめた。コンデンサに蓄えられる電気料 Q (t)、および電流 I(t) を求めよ。

キルヒホッフの法則より、

$$V_0 - IR - \frac{Q}{C} = 0 \tag{2.1}$$

となる。$t = 0$ を代入し、初期電流 I_0 が求まる。

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \tag{2.2}$$

また、$I = 0$ を代入し、最大電荷量が求まる。

$$Q = CV_0 \tag{2.3}$$

（1）の式を微分し

$$\frac{d}{dt}(V_0 - \frac{Q}{C} - IR) = 0 - \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} - R\frac{dI}{dt} = 0 \tag{2.4}$$

$I = \frac{dq}{dt}$ であるので

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}dt \tag{2.6}$$

$t=0$ の時、$I=I_0$ であるので

$$\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}\int_0^t dt \tag{2.7}$$

$$I(t)=I_0e^{-\frac{t}{RC}}=\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \tag{2.8}$$

また式（８）に $I=\frac{dq}{dt}$ を代入し

$$\frac{dq}{dt}=\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \tag{2.9}$$

$$dQ=\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}dt \tag{2.10}$$

$t=0$ の時、$Q=0$ より

$$\int_0^Q dQ=\frac{V_0}{R}\int_0^t e^{-\frac{t}{RC}}dt \tag{2.11}$$

$$Q(t)=CV_0(1-e^{-\frac{t}{RC}})=Q(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{2.12}$$

２ 次に十分時間がたってから、スイッチを B 側に倒した。そのあと抵抗 R で発生する
ジュール熱を求めよ。

$t=0$ でコンデンサに蓄えられているエネルギーは $\frac{1}{2}CV_0^2$。コンデンサに蓄えられていた初期エネルギーがすべて抵抗でジュール熱になったエネルギーに等しいので

$$U=\frac{1}{2}CV_0^2 \tag{2.13}$$

がジュール熱になった。

３ 続いてＰＱに（b）を接続して、t＝０でスイッチを A 側につないだ。コイルの逆起電力 V_L は

$$V_L=-L\frac{dI}{dt} \tag{2.14}$$

これから

$$V - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{2.15}$$

$$x = (\frac{V}{R}) - I \tag{2.16}$$

つまり

$$dx = -dI \tag{2.17}$$

とおくと

$$x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0 \tag{2.18}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{R}{L}dt \tag{2.19}$$

となる。式（１９）を積分し

$$\ln(\frac{x}{x_0}) = -\frac{R}{L}t \tag{2.20}$$

$$x = x_0 e^{-\frac{R}{L}t} \tag{2.21}$$

$t = 0$ の時、$I = 0$ であるので

$$x_0 = \frac{V_0}{R} \tag{2.22}$$

となる。よって

$$\frac{V_0}{R} - I = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \tag{2.23}$$

$$I = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \tag{2.24}$$

となる。

4 十分時間がたってから、スイッチを B 側に倒した。その後抵抗 R で発生する熱エネルギーを求めよ。

$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{2.25}$$

この微分方程式を解くと

$$I = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \tag{2.26}$$

となる。R で消費されるエネルギーの割合 $\frac{dU}{dt}$ は

$$\frac{dU}{dt} = I^2R = I_0^2Re^{-\frac{2R}{L}t} \tag{2.27}$$

となる。$t=0$ から $t=\infty$ まで積分すると

$$U = \int_0^\infty I_0^2Re^{-\frac{2R}{L}t}dt = I_0^2R\int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t}dt = \frac{1}{2}LI_0^2 \tag{2.28}$$

よって $\frac{1}{2}LI_0^2$ が熱エネルギーになった。

5 最後に、P Q に（c）を接続して、スイッチを A につなぎ、十分時間がたってからスイッチを B 側に倒した。その時、どのような現象が起きるか説明せよ。

任意の時刻における回路に蓄えられている全エネルギーは、コンデンサ $\frac{Q^2}{2C}$、コイル $\frac{1}{2}LI^2$ のようになり、抵抗から散逸される

$$\frac{dU}{dt} = -I^2R \tag{2.29}$$

となり、これから

$$LI\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = -I^2R \tag{2.30}$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{2.31}$$

この方程式の解は

$$Q = Q_me^{-\frac{R2Lt}{\cos}(w_dt)} \tag{2.32}$$

（Q_m ：コンデンサの最大電荷量）

$$w_d = (\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.33}$$

となる。
R＝0の時、

$$Q = Q_m \cos(wt) \tag{2.34}$$

となり、調和振動をする。

$$R << (\frac{4L}{C})^{\frac{1}{2}} \tag{2.35}$$

の時、減衰調和振動を行なう。

$$R > (\frac{4L}{C})^{\frac{1}{2}} \tag{2.36}$$

の時、過減衰する。

3

1

原子を中心に点電荷 Z_e があり、半径 R の球内に負電荷が一様な密度 σ で分布

$$\frac{4}{3}\pi R^3\sigma = Ze \tag{3.1}$$

$$\sigma = \frac{3}{4\pi R^3}Ze \tag{3.2}$$

とする。
$r > R$ の時
r 内の電荷の和は 0 になるので

$$F(r) = 0 \tag{3.3}$$

$r < R$ の時
r 内の電荷の和は

$$q_e = Ze - \frac{4}{3}\pi r^3\sigma = \frac{4}{3}\pi\sigma(R^3 - r^3) \tag{3.4}$$

よって

$$F(r) = \frac{zeq_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\sigma = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\frac{3}{4\pi R^3}Ze = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}) \tag{3.5}$$

2

$$\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} = a \tag{3.6}$$

とおくと

$$-V(r) = \int_R^r F(s)ds = \int_R^r a(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}) = (-\frac{r^2}{2R^3} - \frac{1}{r} + \frac{3}{2R})a \qquad (3.7)$$

よって

$$V(r) = (\frac{r^2}{2R^3} + \frac{1}{r} - \frac{3}{2R})(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}) \qquad (3.8)$$

3

入射 α 粒子の運動エネルギーを

$$E = \frac{1}{2}mV_0^2 \qquad (3.9)$$

とすると

$$\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon r_e} = E = \frac{1}{2}mV_0^2 \qquad (3.10)$$

が成り立つ。 よって

$$r_e = \frac{zZe^2}{2\pi\epsilon_0 mV_0^2} \qquad (3.11)$$

4

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} * z * Z * \frac{1}{E} = 2.3 * 10^{-28} * 2 * 79 * \frac{1}{6 * 10^6 * 1.6 * 10^{-19}} = 3.8 * 10^{-14} \qquad (3.12)$$