平成17年度2次募集解答

桑島淳宏
解答確認
斎藤 高

平成17 年6 月28 日

1

最下点出の速さを v_0 とすると、力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL \tag{1}$$

$$v_0^2 = 2gL \tag{2}$$

最下点から右回りを正に θ をとると、質点の向心方向の運動方程式は、
糸の張力を T として、

$$m\frac{v^2}{r} = T - mg\cos\theta \tag{3}$$

また、力学的エネルギーの保存則より、角度 θ の位置での速さを v として、

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgr(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{4}$$

(3),(4) より、v を消去して、

$$T = m\frac{v_0^2}{r} - mg(2-3\cos\theta) \tag{5}$$

円運動を行うためには、$T \geq 0$ かつ、$v^2 > 0$ でなければならないので、

$$\begin{cases} v^2 = v_0^2 - 2gr(1-\cos\theta) > 0 \\ T = m\frac{v_0^2}{r} - mg(2-3\cos\theta) \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

任意の θ で (6) が成り立つには、$\theta = \pi$ で成り立てばよい。
従って、(6) より、

$$\begin{cases} v_0 > \sqrt{4gr} \\ v_0 \geq \sqrt{5gr} \end{cases} \tag{7}$$

よって、

$$v_0^2 \geq 5gr \tag{8}$$

である。
$r = L - d$ として、(2) を代入して d について解くと、

$$d \geq \frac{3}{5}L \tag{9}$$

(9) が円運動をするための d にたいする条件である。

$\boxed{2}$ 1.

ガウスの法則の微分形は、

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \tag{1}$$

問題より、$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \mathrm{t}} = \boldsymbol{i}$ であるから、発散をとると、

$$\mathrm{div}\mathrm{rot}\boldsymbol{H} - \mathrm{div}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{div}\boldsymbol{i} \tag{2}$$

ここで、$\mathrm{div}\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = 0$, $\mathrm{div}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{div}\boldsymbol{D}$, であるから、

$$\mathrm{div}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \mathrm{div}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} = 0 \tag{3}$$

2.

今、$\boldsymbol{r}_q$ の位置にある電荷が $\boldsymbol{r}$ につくる電場 $\boldsymbol{E}$ は、$t = 0$ で、$\boldsymbol{r}_q = 0$ とすると、

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q|^3} \tag{4}$$

$\boldsymbol{r}_q$ は、$|\boldsymbol{v}| = v$ となる、$\boldsymbol{v}$ を用いて、$\boldsymbol{r}_q = \boldsymbol{v}t$ と表されるから ($\boldsymbol{v}$ は、定ベクトル)、

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\mathrm{t}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\mathrm{t}|^3} \tag{5}$$

よって、電荷密度 $\boldsymbol{D}$ は、

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\mathrm{t}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\mathrm{t}|^3} \tag{6}$$

今、$\boldsymbol{H}$ は、存在しないので、$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = 0$ である。
$\boldsymbol{i} = -\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ だから、(6) より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= -\frac{q}{4\pi}\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\mathrm{t}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\mathrm{t}|^3} & (7) \\ &= \frac{q}{4\pi}\left\{-\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\mathrm{t}|^3} + \frac{3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\mathrm{t})[\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\mathrm{t})]}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\mathrm{t}|^5}\right\} & (8) \end{aligned}$$

である。

$\boxed{3}$

1)

$f(x) = e^{\hat{A}x}e^{\hat{B}x}$ とおく。
両辺を x で微分すると、

$$\frac{d}{dx}f(x) = \hat{A}e^{\hat{A}x}e^{\hat{B}x} + e^{\hat{A}x}\hat{B}e^{\hat{B}x} \tag{1}$$

両辺に右から、$e^{\hat{A}x}e^{-\hat{A}x}f(x)$ を作用させると、

$$\frac{d}{dx}f(x) = (\hat{A} + e^{\hat{A}x}\hat{B}e^{-\hat{A}x})f(x) \tag{2}$$

ここで、Baker-Hausdorf の関係より、

$$e^{\hat{A}x}\hat{B}e^{-\hat{A}x} = \hat{B} + x[\hat{A},\hat{B}] + \frac{x^2}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \cdots\cdot \tag{3}$$

であるから (2) は、

$$\frac{d}{dx}f(x) = (\hat{A} + \hat{b} + [\hat{A},\hat{B}]x)f(x) \tag{4}$$

である。(与えられた交換関係を用いた。)
(4) の微分方程式の解は $f(x) = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]x^2}$ であり、$x = 1$ として右から $e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$ を作用すれば、

$$\exp(\hat{A}+\hat{B}) = \exp\hat{A}\exp\hat{B}\exp\left(-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]\right) \tag{5}$$

である。

2)

$\hat{U}(a)$ に 1) の関係式を使うと、

$$\hat{U}(a) = \exp\left(\frac{a}{\sqrt{2}x_0}\hat{a}^\dagger\right)\exp\left(-\frac{a}{\sqrt{2}x_0}\hat{a}\right)\exp\left(\frac{a}{2\sqrt{2}x_0}\right) \tag{6}$$

従って、

$$\begin{aligned} |0(a)\rangle &= \hat{U}(a)|0\rangle & (7)\\ &= \exp\left(\frac{a}{2\sqrt{2}x_0}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{a}{\sqrt{2}x_0}\right)^n(\hat{a}^\dagger)^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{a}{-\sqrt{2}x_0}\right)^n(\hat{a})^n|0\rangle & (8)\end{aligned}$$

$\hat{a}|0\rangle = 0$ であるので、(8) は、

$$\begin{aligned} |0(a)\rangle &= \exp\left(\frac{a}{2\sqrt{2}x_0}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\sqrt{2}x_0}\right)^n\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle & (9)\\ &= \exp\left(\frac{a}{2\sqrt{2}x_0}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\sqrt{2}x_0}\right)^n\frac{1}{\sqrt{n!}}|n\rangle & (10)\end{aligned}$$

(11) が求める展開式である。

3)
問題で与えられた $|n\rangle$ に、$\hat{a}$ を作用させると、

$$\begin{aligned}
\hat{a}|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle && (11)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle && (12)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle && (13)\\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}\right\}|0\rangle && (14)\\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger)^{n-2}+\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}\right\}|0\rangle && (15)\\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)(\hat{a}^\dagger)^{n-2}+\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}\right\}|0\rangle && (16)\\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^2\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^{n-2}+2\left[\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}\right]\right\}|0\rangle && (17)
\end{aligned}$$

このように、交換関係 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$ をを用いて、展開していくと結局、

$$\hat{a}|n\rangle = \left\{\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n\hat{a}+\frac{n}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}\right\}|0\rangle \tag{18}$$

$\hat{a}|0\rangle = 0$ であるので、(19) は、

$$\hat{a}|n\rangle = \frac{n}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle \tag{19}$$

となる。
2) で求めた、固有ベクトルで展開された $|0(a)\rangle$ に、$\hat{a}$ を作用すると、

$$\hat{a}|0(a)\rangle = \exp\left(\frac{a}{2\sqrt{2}x_0}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\sqrt{2}x_0}\right)^n\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}|n\rangle \tag{20}$$

(20) を代入すると、

$$\hat{a}|0(a)\rangle = \exp\left(\frac{a}{2\sqrt{2}x_0}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\sqrt{2}x_0}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{n}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle \tag{21}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}x_0}\exp\left(\frac{a}{2\sqrt{2}x_0}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}x_0}\right)^{n-1}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle \tag{22}$$

(9) の n を n-1 にかえても結果は変わらないので、これと (22) を比較することで、

$$\hat{a}|0(a)\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}x_0}|0(a)\rangle \tag{23}$$

となることがわかる。

$\boxed{4}$

温度 T が一定なので、カノニカル分布によって扱う。(k:ボルツマン定数)

(1)

1 つのスピンに関する分配関数 Z_1 は、

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \exp\left\{-\frac{1}{kT}\left[-g\mu_B H\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} + \exp\left\{-\frac{1}{kT}\left[-g\mu_B H\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\} && (1) \\
&= \exp\left(\frac{g\mu_B H}{2kT}\right) + \exp\left(-\frac{g\mu_B H}{2kT}\right) && (2) \\
&= 2\cosh\left(\frac{g\mu_B H}{2kT}\right) && (3)
\end{aligned}
$$

おのおののスピンは独立しているので、全系の分配関数は、１つのスピンに関する分配関数の N 乗に等しいから、

$$
Z = \left[2\cosh\left(\frac{g\mu_B H}{2kT}\right)\right]^N \tag{4}
$$

(2)

ヘルムホルツの自由エネルギーを F とすると、

$$
\begin{aligned}
F &= -kT\log Z && (5) \\
&= -NkT\log\left[2\cosh\left(\frac{g\mu_B H}{2kT}\right)\right] && (6)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
M &= -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_T && (7) \\
&= -\left[-NkT\left(\frac{2\frac{g\mu_B}{2kT}\sinh\left(\frac{g\mu_B H}{2kT}\right)}{2\cosh\left(\frac{g\mu_B H}{2kT}\right)}\right)\right] && (8) \\
&= \frac{Ng\mu_B}{2}\tanh\left(\frac{g\mu_B H}{2kT}\right) && (9)
\end{aligned}
$$

よって、磁気モーメント M は、H が増加すると増加し、T が増加すると減少する。

$\boxed{5}$

問 1

黒体輻射に関するプランクのエネルギー密度 $u(\nu,T)$ （ν：振動数　T：温度) の公式は、エネルギーを $\varepsilon = h\nu$ を単位として、その整数倍であると仮定するとボルツマンの確率分布より、

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} && (1) \\ &= \frac{h\nu}{e^{\frac{nh\nu}{kT}} - 1} && (2) \end{aligned}$$

であるから、モードの数を $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ とすると、

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{nh\nu}{kT}} - 1} \tag{3}$$

となる。つまり、エネルギーが $E = h\nu$ をもった、量子として振る舞うという仮説が、エネルギー量子仮説である。

問 2

光電効果を説明するためにアインシュタインは、電磁放射自体がエネルギー $E = h\nu$ をもつ量子の集まりであるという仮説をたてた。つまり、電磁波は $E = h\nu$ をもつ粒子のような振る舞いをする。これが、光量子仮説である。

問 3

光電効果による光電子の最低エネルギーは、照射する光（電磁波) の強度、時間に関係が無く振動数（波長）に関係している。つまり、どんなに、強い光を長時間照射しても、振動数がある一定以上にならないと光電子は飛び出さない。しかし、光を振動数に関連したエネルギーをもつ粒子と考えると、ある一定以上の振動数 (=エネルギー) がないと、光電子が放出されないことがわかる。よって、光電効果は、光の粒子性を示す現象である。