学籍番号 20HS302B

信州大学審査学位論文

オービフォルド余剰次元模型における境界条件の表現行列の対角化可能性について

令和５年９月

信州大学大学院総合医理工学研究科

総合理工学専攻・物質創成科学分野

氏名　　　小平 英治

Contents

1　はじめに

素粒子標準模型は弱い力のスケールにおける有効理論として確立されているが，いくつかの問題点が挙げられている。例えばゲージボソンとヒッグスボソンの起源は長らく大きな謎とされてきた。標準理論は一見したところ煩雑であり，もっと簡潔で美しい理論がその背後にあるのではないかと多くの研究者が考えている。４次元時空よりも高次の空間次元（余剰次元）を持つ高次元時空において定義された理論はそのひとつの候補である。本研究はその中でも，そうした高次元時空のもとで標準模型を拡張・洗練していくような方向性で構築される高次元ゲージ理論に焦点を当てる。そこでは例えばゲージボソンとヒッグスボソンは高次元ゲージ多重項として統一される [1]。高次元理論から導かれる有効理論においてフェルミオンをカイラルなもの（右巻きか左巻きかによって異なるゲージ相互作用をしうるもの）にするためには，余剰次元の構造としてオービフォルドを考えるのが一般的である。以下，それらの理論を「オービフォルド余剰次元模型」と呼ぶことにする。

オービフォルド余剰次元模型では，大統一理論（GUT）でヒッグス粒子の質量を考えたときに生じる二重項三重項問題 [2, 3, 4] がスマートに解決される [5, 6] など，現象論的な利点も見出されている。ゲージボソンとヒッグスボソンを統合するというアイデアを電弱対称性の破れの機構に用いる研究もある。そこでは高次元での随伴表現から，そのゼロモードとして二重項を抽出することができるということを利用している [7, 8, 9]。このときヒッグス場は空間的に分離された対称性の破れに関連した擬南部・ゴールドストーンモード [10] として扱うことができ，それによってヒッグス場の有効ポテンシャルは超対称性によらずとも有限となる [11, 12]。そこでは対称性の破れの非局所性がうまく働いている。その一方でサブダイアグラム（有効ポテンシャルの計算をファインマンダイアグラムの要領でダイアグラムに表したとき，その一部をなすダイアグラム）においては局所的に発散が生じるが [13, 14, 15]，それらの発散はより低次の相殺項だけで取り除くことができ，付加的な相殺項の導入を必要としない [13, 14]。このことは，有効ポテンシャルは有限の繰り込まれた結合定数で書かれている場合には発散を免れるということを意味している。ゲージボソンとヒッグスボソンの統合というアイデアは GUT の文脈でも取り上げられ，上述のように電弱対称性の破れに利用されたり [16, 17, 18]，近年では GUT の対称性の階数（ランク; rank）を落とす機構に利用されたりしている [19]。また，統合された対称性を破る機構において，ヒッグス多重項における質量の分離をもたらすための境界条件というものがあり，先行研究 [5, 6, 20] ではこれを仮定として導入しているが，ゲージボソンとヒッグスボソンの統合というアイデアを用いると，これが有効ポテンシャルの最小値に対応するものとして自然に得られるということが示されている [21, 22, 23]。それに伴う

現象論的帰結についても研究が進められている [24, 25]。他方，2 次元オービフォルド上に一様磁場があると考えると，その磁束量子化数が有効理論における世代数に対応するということを示した研究成果も報告されている [26, 27, 28]。これは標準模型における世代数問題（なぜ 3 つの世代があるのかという問題）に対して光を投げかけうるものである。本研究は具体的な模型構築に直接参与するものではないが，それらオービフォルド余剰次元模型の基礎をなす機構のひとつである細谷機構の一要素について，その性質のひとつを詳しく調べる。それによってこの分野の研究について理解が深まることを期する。

オービフォルド余剰次元模型では，標準模型の粒子は高次元時空のバルクに存在する場のゼロモードや，境界に存在する場でありブレーン場と呼ばれる 4 次元場として導入される。物理的対称性（観測される対称性）は場の境界条件とウィルソンライン位相の動力学的過程（dynamics）の両方によって決定され，その機構は細谷機構と呼ばれている [29, 30, 31]。そのため，境界条件について調べることは動力学的過程について調べるのと同様に重要である。オービフォルドにおける境界条件は一連の表現行列のセットによって特定される。それらの表現行列は「境界条件行列」とか「ひねり行列（twist matrix）」と呼ばれる。本稿では以後主としてひねり行列という呼び方のほうを用いる。そしてひねり行列のセットはゲージ対称性における等価関係によって分類される [32]。つまり一見異なる行列セット同士であっても，適当なゲージ変換によって一方が他方と同じ形に変換されるならば，ゲージ原理に従い，それらは物理的に等価なものとして扱われる。そのようにして結ばれる行列セット同士の集まりは同値類（equivalence class）と呼ばれる。文献 [32] では，$S^1/\mathbb{Z}_2$ におけるひねり行列の分類が研究され，そして各同値類の中には対角型の行列セット（セットに含まれる行列が全て対角型であるもの）が必ずひとつ以上含まれることが示された。そしてそのことを用いて，余剰次元を $S^1/\mathbb{Z}_2$ とする模型における有効ポテンシャルの一般形を計算することに成功している [33]。本稿の第 2 章で述べるように，有効ポテンシャルの計算は細谷機構の計算において重要な要素のひとつである。他方，余剰次元を 2 次元とした $T^2/\mathbb{Z}_N$ $(N = 2, 3, 4, 6)$ オービフォルドについては，ひねり行列のセットとして対角型のものが与えられたと仮定した場合の有効ポテンシャルの一般形は調べられているが [34, 35, 36]，その仮定がいつでも成り立つのか，つまりすべての同値類の中に対角型のものが必ずひとつ以上存在するのか，については明確な答えが出ていない。[1] もしそれが証明されれば，彼らが調べた有効ポテンシャルについての結果は $T^2/\mathbb{Z}_N$ $(N = 2, 3, 4, 6)$ オービフォルドをもつ余剰次元模型全体に一般化できることが期待される。そ

[1]文献 [37, 35] では $T^2/\mathbb{Z}_2$ 上にコンパクト化された $SU(2)$ ゲージ理論のひとつにおいてひねり行列の分類が調べられている。文献 [38] ではこの問題について行列の指数関数の表現を用いて解答が試みられたが，すべての条件を完全に包摂したものとはなっていないため不完全さを残している。

れと同様に，一般にひねり行列の組が対角型であると様々な計算が容易になり，各模型や各物理量の振る舞いを調べやすくなることが期待される。その際，各同値類に対角型のものが必ずひとつ以上含まれるということが分かっていれば，その結果はただちに一般化できることが期待される。

本研究では，$T^2/\mathbb{Z}_N$ $(N=2,3,4,6)$ オービフォルド上にコンパクト化された $SU(n)$ ないし $U(n)$ ゲージ理論において，そのひねり行列の同値類の中に必ず対角型のものが存在するかについて調べた。より具体的には，各オービフォルドのひねり行列として満たすべき制約条件や，ユニタリ変換，ゲージ変換を用いることで，どんなひねり行列のセットを与えられた場合でも必ずそこに含まれる行列のすべてを同時対角化できるかどうか，を調べた。結果，$T^2/\mathbb{Z}_2$ と $T^2/\mathbb{Z}_3$ においては各同値類の中に少なくともひとつの対角型の行列セットが存在することが示された。しかし $T^2/\mathbb{Z}_4$ と $T^2/\mathbb{Z}_6$ については，部分行列を対角型に並べたブロック対角型の形にはなるが，その部分行列の中には必ずしも対角型でないものが一般には含まれうることが示された。ひとつの体系的な述べ方は次のようなものである。$T^2/\mathbb{Z}_N$ $(N=2,3,4,6)$ は制約条件を利用した適切なユニタリ変換によっていずれもブロック対角型の形になる。そしてそれらを構成する部分行列は，$T^2/\mathbb{Z}_2$ では 2×2 と 1×1 の 2 種類，$T^2/\mathbb{Z}_3$ では 3×3 と 1×1 の 2 種類，$T^2/\mathbb{Z}_4$ では 4×4 と 2×2 と 1×1 の 3 種類，$T^2/\mathbb{Z}_6$ では 6×6 と 3×3 と 2×2 と 1×1 の 4 種類であることが示される。つまり N の約数を次数とする部分行列を対角型に並べたブロック対角型行列として必ず表せる。そしていずれにおいても，$N\times N$ の部分行列は適切なゲージ変換によって対角型になることが示される。上で便宜上「1×1 の部分行列」と呼んだものが集まっている部分はすでに対角行列の体裁をなしている部分であるから，結果として $T^2/\mathbb{Z}_2$ と $T^2/\mathbb{Z}_3$ は全体として対角行列になる。しかし $T^2/\mathbb{Z}_4$ では 2×2，$T^2/\mathbb{Z}_6$ では 3×3 および 2×2 の部分行列は，ゲージ変換によって対角化することができない。そのため $T^2/\mathbb{Z}_4$ と $T^2/\mathbb{Z}_6$ の場合，そのひねり行列の同値類の中に必ず対角型のものが存在するとは言えない。たまたま N や 1 を次数とする部分行列だけから成り立っている場合ならば対角化できるが，一般にそれら以外の約数を次数とする部分行列が含まれる場合，そのひねり行列の同値類の中に対角型のものは存在しない。

本論文の構成は以下の通りである。まず第 2 章でオービフォルド余剰次元模型の基本構成について述べる。具体的な個々の模型の構築においては，具体的に何次元までを仮定するのか，高次元におけるゲージ群としては何を選ぶのか，どのような場をどれくらいの数仮定するのか，等々の要素において多様な可能性があるが，最も基本となる構成要素は共通している。それは余剰次元の構造を反映して場に設定される境界条件と，細谷機構と，余剰次元とし

てオービフォルドを用いることである。これらについて説明し議論する。第3章では，オービフォルド余剰次元模型についてより深い理解を得るための課題のひとつとして，境界条件を行列で表現したものである「ひねり行列」の対角化可能性という課題に取り組んだ結果を記述する。これは信州大学の川村嘉春氏，九州大学の小島健太郎氏，愛知医科大学の山下敏史氏との共同研究 [39] に基づくものである。１次元オービフォルド $S^1/\mathbb{Z}_2$ についてはすでに先行研究で対角化可能であることが示されている [16] が，２次元オービフォルドについてはまだ研究は未完成であった [38]。そこで２次元オービフォルド $T^2/\mathbb{Z}_N(N=2,3,4,6)$ について調べた。結果，上で述べたように，$T^2/\mathbb{Z}_2$ と $T^2/\mathbb{Z}_3$ については必ず対角化可能であることが分かったが，$T^2/\mathbb{Z}_4$ や $T^2/\mathbb{Z}_6$ の場合は必ずしも対角化可能ではないことが分かった。おそらく $\mathbb{Z}_N$ の N が素数でない場合は必ずしも対角化可能ではないということであろうと思われる。最後に第4章でまとめと考察を行った。付録では、第2章に関する補足的な内容を付録 A と B に、第3章における計算の詳細を付録 C から付録 I にかけて掲載した。

第2章の記述は主として文献 [40] の3章・4章・5章の記述を参考にした。単位系としては $\hbar=c=1$ とする自然単位系を用いた。ミンコフスキー計量の表示は，上記の文献にならい $\eta=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ とするものを用いた。一般に素粒子理論分野では $\eta=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ を用いることが多く，$\eta=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ の表示を用いるのは宇宙論や超弦理論の分野に多いと言われているが，この表示の少なくともひとつの利点は空間成分の計量が $+1$ なので第2章で記述するような計算の確認においてはミスが少なくなるという点である。素粒子理論分野の他の文献と比べると例えばラグランジアンの中のいくつかの項の符号が逆であるなどの違いがあるが，それは用いている計量の表示の違いによるものであり，記述されている理論の本質に違いはない。また第3章で示す一連の数式には計量の表示の違いは影響しない。特殊ユニタリ群の表記としてはその次数を n として $SU(n)$ とするものを主として用いた。一般には $SU(N)$ と書かれることが多いが，本論文ではアルファベット N は $T^2/\mathbb{Z}_N$ のほうに用い，それとの混同を避けるため特殊ユニタリ群のほうは $SU(n)$ と書いた。しかしその一方で，第2章では n はカルツァ・クラインモード番号の n と混同される恐れがあった。そこで第2章に限っては $SU(N)$ と書いた。

2　オービフォルド余剰次元模型の基本構成

2.1　境界条件と細谷機構

本節ではオービフォルド余剰次元模型の基本要素としてまずは境界条件と細谷機構について説明する。細谷機構は，ゲージ場の余剰次元方向成分と（高次元）場に関する境界条件とを組み合わせたウィルソンライン位相と呼ばれる物理量の真空期待値によって，次元簡約（dimensional reduction）（もしくはコンパクト化；compactification とも呼ばれる）に伴い理論のもつゲージ対称性が（自発的に）破れうることを説明するものである。それを利用して，大統一理論やゲージ・ヒッグス統合理論といった理論を構成する指針となる。その本質的な部分の説明にあたっては余剰次元がオービフォルドである必要はないので，本節では記述が不必要に複雑になるのを避けるため，余剰次元がオービフォルドではなく，より単純な S^1 と呼ばれる構造をもっている場合を例にとって説明する。具体的には，余剰次元として空間の 4 番目の成分を仮定した 5 次元模型を考え，その余剰空間成分座標を y で表したとき $y \sim y + 2\pi R$ （「y と $y + 2\pi R$ を同一視する」）という条件だけが課された場合を考える。R は適当なパラメータであるが，しばしば「余剰次元の半径」と呼ばれる。これは 5 次元模型の最も基礎的な設定である。$y \sim y + 2\pi R$ という仮定は具体的には例えば場 $\Phi(x, y)$ について $\Phi(x, y) = \Phi(x, y + 2\pi R)$ とおくこと等によって実現される。ここで $\Phi(x^0, x^1, x^2, x^3, y) = \Phi(x, y)$ と書く省略記法を用いた。x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ は通常のミンコフスキー時空の座標である。$y \sim y + 2\pi R$ という条件が課されることにより後述の次元簡約を経て，その 5 次元模型から 4 次元の模型（4 次元有効理論と呼ばれる）が導かれる。

$y \sim y + 2\pi R$ という条件が課されるとき，その余剰空間は S^1 をなすと言われる。残りの 4 次元は通常のミンコフスキー時空であると設定すると，そちらの時空は M^4 であると言われる。そしてこの 5 次元時空は $M^4 \times S^1$ の時空であると言われる。そしてその時空上に作られた 5 次元模型は $M^4 \times S^1$ 上の模型と言われる。例えばそれがゲージ理論の構造を持っているならば $M^4 \times S^1$ 上のゲージ理論である。本節では $M^4 \times S^1$ 上のゲージ理論を例にとって境界条件と細谷機構について説明する。

$y \sim y + 2\pi R$ に加えてさらに $y \sim -y$ という条件を課すと 1 次元オービフォルドの最も基礎的な例である $S^1/\mathbb{Z}_2$ になる。その場合については次節で説明する。現代の余剰次元模型（余剰次元をもつゲージ理論）は基本的にほとんどがオービフォルド余剰次元模型であるが，オービフォルドにする第一の理由は，それが低次元有効理論においてフェルミオンをカイラルにする最もよいアイデアのひとつだからである。ここで「フェルミオンがカイラルである」と書い

たのは，それが右巻きであるか左巻きであるかによって異なるゲージ相互作用をするという意味である。(「ゲージ相互作用がカイラルである」という言い方もある。) 現在，実験によって最も支持されている模型は標準模型であるが，その標準模型では左巻きクォークや左巻きレプトンのみが荷電カレントに伴う弱い相互作用をする。つまりフェルミオンはカイラルなものとして記述されている。したがって余剰次元模型でも，そこから導かれる 4 次元有効理論におけるフェルミオンがカイラルであるような何らかのアイデアを組み込むのが望ましいと考えられる。そのアイデアのひとつが余剰次元をオービフォルドに設定するというものであり，広く用いられている。

本節でこれから述べる内容を短くまとめれば次のようになる。余剰次元が S^1 のような構造を持っているとき，境界条件というものを設定することができる。そして $M^4 \times S^1$ 上のゲージ理論が非可換ゲージ理論であり，かつ，5 次元ゲージ場 A_M $(M = 0, 1, 2, 3, 5)$ の第 5 次元方向成分 $A_5 = A_y$ が真空期待値 $\langle A_y \rangle$ をとるとき，対称性の破れが生じうる。つまり 5 次元ゲージ理論がもっている対称性が，4 次元有効理論ではより低い対称性へと破れているということが生じうる。どのような対称性に破れるかは境界条件と $\langle A_y \rangle$ の値によって決まる。境界条件と A_y を組み合わせるとゲージ不変な量すなわち物理的観測量たりうる量としてウィルソンライン位相（または（余剰次元上の）「アハロノフ・ボーム位相」とも呼ばれる [40]）というものが定義される（後述する式 (2.68) の $\hat{W}$ の固有値）。そして上に述べた 4 次元有効理論での対称性は，このウィルソンライン位相の真空期待値により決まる，として体系的に記述できる。別の言い方をすれば，ウィルソンライン位相の動力学的過程（dynamics）により決まる，とも言える。そしてそのようにウィルソンライン位相の値によって高次元理論での対称性が（自発的に）破れる機構を細谷機構と言う。

本章ではこの細谷機構について段階的に説明していく。具体的には，はじめに $M^4 \times S^1$ 上の自由スカラー場の模型で，次元簡約とカルツァ・クライン展開およびカルツァ・クラインモードについて説明する。この段階では細谷機構は出てこないが，それらの要素は細谷機構にとっても重要な要素である。次にそこに 1 つの $U(1)$ ゲージ場を導入して簡単な $U(1)$ ゲージ理論の模型とする。そこで A_y が定数値をとると，その値がカルツァ・クラインモードの質量に入ってくることを見る。これはある意味で細谷機構の端緒が見られる例と言えるが，対称性の破れは生じない。次にそこでのゲージ場を $U(1)$ ゲージ場から $SU(N)$ ゲージ場に変え，模型を $M^4 \times S^1$ 上の $SU(N)$ ゲージ理論にする。するとウィルソンライン位相の動力学的過程によって対称性の破れが生じうることが示される。ここではじめて細谷機構そのものの最も簡潔な例を見ることになる。そこまでを本節でこれから説明し，次節において余剰次元を S^1 からオー

ビフォルド $S^1/\mathbb{Z}_2$ にしたときについてを説明する。

2.1.1 次元簡約とカルツァ・クラインモード

ラグランジアン密度が

$$\mathcal{L} = -\left(\partial_M \Phi\right)^\dagger \partial^M \Phi, \quad (M = 0, 1, 2, 3, 5), \tag{2.1}$$

で与えられる理論を考える。$M = 0, 1, 2, 3, 4$ とせず $M = 0, 1, 2, 3, 5$ とするのは慣例である。余剰次元が空間の第 4 次元であるという観点からすれば前者のほうが自然だが，時空の第 5 次元であるということを強調し，かつ，それが他の 3 つの空間次元とは異質なものであることを強調するならば，後者もそれほど不自然ではないと言える。そして後者は，後述するディラック場の運動項を書くときに便利なものとなっている。Φ は 5 次元時空上の複素スカラー場 $\Phi(x, y) = \Phi(x^0, x^1, x^2, x^3, y)$ である。ここで空間の第 4 次元を y で表した。これは相互作用やポテンシャルのない自由複素スカラー場の理論である（素粒子論の多くの文献では右辺のマイナスの符号がついていないことが多いが，ここでマイナスがつくのは，時空の計量を $\eta = (-1, 1, 1, 1, 1)$ にとっているためである）。作用は

$$S = \int d^5x \left\{ -\left(\partial_M \Phi\right)^\dagger \partial^M \Phi \right\}, \tag{2.2}$$

となる。積分測度 $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 dy$ を d^5x と書いた。積分範囲は各次元ごとに $-\infty$ から ∞ までをとる。ここで余剰空間次元 y について $y \sim y + 2\pi R$ の条件が課され，それによって余剰次元が S^1 の構造をもつとする。このときラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ がこの S^1 上で一価であるということ，すなわち $\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{L}(x, y + 2\pi R)$ を要請する。すると Φ は,

$$\Phi(x, y + 2\pi R) = e^{i\beta} \Phi(x, y), \tag{2.3}$$

と書くことができる。β は任意の実数であるが、$0 \leq \beta < 2\pi$ としておく。これから述べるような次元簡約の導入的説明においては簡単のために $\beta = 0$ ととられることが多い。ここでもまずはそのようにとり,

$$\Phi(x, y + 2\pi R) = \Phi(x, y), \tag{2.4}$$

とする。これは $\Phi(x, y)$ について「境界条件を設定した」ものと言われる。すると $\Phi(x, y)$ は y についての周期関数であるから y についてフーリエ展開することができて,

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi^{(n)}(x)\, e^{i \frac{n}{R} y}, \tag{2.5}$$

となる。これを作用に代入する。$y \sim y + 2\pi R$ の条件のもとでは作用は

$$\tilde{S} = \int d^4x \int_0^{2\pi R} dy \left\{ - \left(\partial_M \Phi\right)^\dagger \partial^M \Phi \right\}, \tag{2.6}$$

と書ける。積分測度 $dx^0dx^1dx^2dx^3$ を d^4x と書いた。ここに式 (2.5) の $\Phi(x,y)$ を Φ として代入し，y についての積分を実行すると，

$$\tilde{S} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^4x \left\{ -(\partial_\mu \Phi^{(n)})^\dagger \partial^\mu \Phi^{(n)} - m_n^2 \Phi^{(n)\dagger}\Phi^{(n)} \right\}, \tag{2.7}$$

$$m_n^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2, \tag{2.8}$$

が得られる。$\Phi^{(n)}(x)$ は $\Phi^{(n)}$ と略記した。これは質量 m_n を持つ 4 次元場 $\Phi^{(n)}(x)$ の集まりからなる M^4 上のスカラー場の理論という体裁になっている。場 $\Phi^{(n)}(x)$ はカルツァ・クラインモード，m_n はカルツァ・クラインモードの質量とかカルツァ・クライン質量と呼ばれる。質量が 0 となる $n=0$ のモードを特別にゼロモードと呼び，$n \neq 0$ のモードだけをカルツァ・クラインモードと呼ぶこともある。またこれらのことを念頭において式 (2.5) のような級数展開をカルツァ・クライン展開と呼ぶ。単にモード展開と呼ばれることもある。そしてこのように余剰次元に対して何らかの条件を設定することにより，より低次元での理論という体裁をもつ理論を導く操作を一般に次元簡約（dimensional reduction; 他の訳としては次元還元など）とかコンパクト化（compactification）と呼び，導かれた理論を（低次元）有効理論と呼ぶ。このとき，場 $\Phi(x,y)$ は質量ゼロの場であって，5 次元時空では理論上まさにそのように振る舞っているはずなのだが，4 次元時空での振る舞いは実質的には式 (2.7) で記述されるので，そこでは質量ゼロの場 $\Phi(x,y)$ そのものは見えず，質量 m_n をもった無数の場 $\Phi^{(n)}(x)$ があるように見える，という描像になる。ただしゼロモード $\Phi^{(0)}(x)$ の質量は $m_0 = (0/R) = 0$ である。これが高次元模型によって 4 次元世界を説明する筋立ての基本的な例である。

なお，実際の模型としては例えば 4 次元有効理論として具体的に標準模型に近い模型を導出し，標準模型の粒子をゼロモードの粒子として説明する試みなどがある。ゼロモードとするのは，標準模型では一般に作用の上では粒子は零質量のものとして書かれるからである。そしてそれに伴い例えば式 (2.8) の $m_n = n/R$ のように R に反比例し n に比例するような質量をもつ一連のカルツァ・クラインモードに対応した粒子が現れると予言する（その粒子そのもののことも「カルツァ・クラインモード」と呼ぶこともある）。しかしながら現在までのところ実験でそのような粒子の存在を裏付けるような兆候はまったく得られていない。これに対して余剰次元模型を擁護する場合，一般には「余剰次元半径」R が非常に小さくそのため m_n が非

常に大きいからであろう，と言われる。現在までの加速器の技術ではそれだけの大きな質量をもつ粒子を生成することができないので，まだ観測されていないのだ，とされる。今後の理論的・実験的研究の進展が待たれるところである。

式 (2.3) で $\beta \neq 0$ ととった場合，カルツァ・クライン展開は式 (2.5) の n を $n + \beta/2\pi$ で置き換えて

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi^{(n)}(x) \exp\left\{ i\frac{1}{R}\left(n + \frac{\beta}{2\pi}\right) y \right\}, \tag{2.9}$$

となる。カルツァ・クラインモード $\Phi^{(n)}(x)$ の質量 m_n は，これも n を $n + \beta/2\pi$ で置き換えて

$$m_n^2 = \frac{1}{R^2}\left(n + \frac{\beta}{2\pi}\right)^2, \tag{2.10}$$

となる。後述する細谷機構の事例などではこの β も重要なはたらきをする。

2.1.2 $U(1)$ ゲージ理論での次元簡約

次に 5 次元の $U(1)$ ゲージ場 $A_M(x, y)$ $(M = 0, 1, 2, 3, 5)$ を導入し，その余剰次元方向成分 $A_5(x, y)$ を $A_y(x, y)$，残りの成分を $A_\mu(x, y)$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ と書くことにする。また上の例のときと同様，数式を簡素化する目的で例えば $A_M(x, y)$ を A_M などと略記する記法を適宜用いることにする。それ以外の場としては上の例と同じく 5 次元時空上の 1 つの複素スカラー場 $\Phi(x, y)$ だけがあるとする。$\Phi(x, y)$ の質量はゼロとする。そして $\Phi(x, y)$ と $A_M(x, y)$ とは相互作用し，その結合定数が g で表されるとする。このときラグランジアン密度は一般に，

$$\mathcal{L} = -\left(D_M\Phi\right)^\dagger D^M\Phi - \frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}, \tag{2.11}$$

$$D_M = \partial_M - igA_M, \qquad F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M, \tag{2.12}$$

と書かれる。$N = 0, 1, 2, 3, 5$ である。作用は，余剰次元について何の制限もなければ一般に

$$S = \int d^5x \left\{ -\left(D_M\Phi\right)^\dagger D^M\Phi - \frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} \right\}, \tag{2.13}$$

と書かれる。これは 5 次元時空上の複素スカラー場 $\Phi(x, y)$ と 5 次元 $U(1)$ ゲージ場 $A_M(x, y)$ とを持つ M^5 上の $U(1)$ ゲージ理論である。ここで余剰次元 y について $y \sim y + 2\pi R$ の条件を課す。すると理論は $M^4 \times S^1$ 上の理論となり，作用は

$$\tilde{S} = \int d^4x \int_0^{2\pi R} dy \left\{ -\left(D_M\Phi\right)^\dagger D^M\Phi - \frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} \right\}, \tag{2.14}$$

と書ける。そして $\Phi(x,y)$ と $A_M(x,y)$ に対する境界条件として，式 (2.4) と同じように

$$\Phi(x, y+2\pi R) = \Phi(x,y), \tag{2.15}$$

$$A_M(x, y+2\pi R) = A_M(x,y), \tag{2.16}$$

と設定する。すると $\Phi(x,y)$ は式 (2.5) と同じようにカルツァ・クライン展開され，$A_M(x,y)$ も同様に展開される。つまり

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi^{(n)}(x)\, e^{i\frac{n}{R}y}, \tag{2.17}$$

$$A_M(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_M^{(n)}(x)\, e^{i\frac{n}{R}y}, \tag{2.18}$$

となる。しかしここで，$A_M(x,y)$ の余剰次元方向成分 $A_y(x,y)$ についてはこれを特別視して，

$$A_y(x,y) = \frac{\theta_H}{2\pi g R}, \tag{2.19}$$

という定数をとったとする。（より完全な記述のためには $A_y(x,y)$ についても普通にカルツァ・クライン展開を考えるのがよいが，ここではカルツァ・クライン質量の計算ができればよいので，簡単のためにそのようにおいて議論を進める。より完全な記述は付録 A に記載する）。右辺は単純に定数 C などと書いてもよいが，後の説明との関連付けの便をはかって $\theta_H/(2\pi g R)$ とした。θ_H は後述するように（狭義の）ウィルソンライン位相とか余剰次元上のアハロノフ・ボーム位相と呼ばれる無次元量であり，$0 \leq \theta_H < 2\pi$ を満たす実数パラメータである。したがって各場の表記は，

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi^{(n)}(x)\, e^{i\frac{n}{R}y}, \tag{2.20}$$

$$A_\mu(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_\mu^{(n)}(x)\, e^{i\frac{n}{R}y}, \tag{2.21}$$

$$A_y(x,y) = \frac{\theta_H}{2\pi g R}, \tag{2.22}$$

となる。これらを式 (2.14) の作用に代入し，y についての積分を実行すると，4 次元有効理論の作用が得られる。その作用は

$$\tilde{S} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^4x \Big\{ -(D_\mu \Phi^{(n)})^\dagger D^\mu \Phi^{(n)} - m_n^2 \Phi^{(n)\dagger}\Phi^{(n)} \\ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(n)} F^{(n)\mu\nu} - \frac{1}{2} M_n^2 A_\mu^{(n)} A^{(n)\mu} \Big\}, \tag{2.23}$$

$$m_n^2 = \frac{1}{R^2}\left(n - \frac{\theta_H}{2\pi}\right)^2, \tag{2.24}$$

$$M_n^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2, \tag{2.25}$$

と書ける。ここで $F_{\mu\nu}^{(n)} = \partial_\mu A_\nu^{(n)} - \partial_\nu A_\mu^{(n)}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ であり，m_n は $\Phi^{(n)}(x)$ の質量，M_n は $A_\mu^{(n)}$ の質量である。また計算の途中で $A_M(x, y)$ が実であること，つまり $A_M(x, y)$ の複素共役を $A_M^*(x, y)$ と書いた場合 $A_M(x, y) = A_M^*(x, y)$ であることを要請した。これはゲージ場に対する物理的観点からの要請として自然な要請である。ここで最も注目すべき点は，$n \neq 0$ の $A_\mu^{(n)}(x)$ がすべて質量をもつことである。ゲージ理論ではゲージ場は質量ゼロの場でなければならない。したがって，この 4 次元有効理論においてなおゲージ場としてのはたらきをするのは $A_\mu^{(0)}(x)$ だけであり，それ以外の $A_\mu^{(n)}(x)$ すなわち $n \neq 0$ の $A_\mu^{(n)}(x)$ はゲージ場ではなく質量をもったベクトル場として現れることになる。第二に注目される点は，$\Phi^{(n)}(x)$ の質量 m_n の中に，A_y の値の一部である θ_H が入ってくることである。これは後述するようにウィルソンライン位相と呼ばれる量である。このあと細谷機構によって対称性の破れが生じるような例の記述に移るが，そこで有効理論においてスカラー場やフェルミオン場が獲得する質量の中にも，やはり同じような形でウィルソンライン位相が入ってくる。細谷機構は M_n にウィルソンライン位相が入ってきてそれによって対称性の破れが生じうるというものなので，細谷機構の意味をその意味に限定するならばここで述べた事例は細谷機構の事例ではない。しかし $A_y(x, y)$ が定数値をとることによって，スカラー場やフェルミオン場のカルツァ・クライン質量の中にその値が入ってくる，という点は一般的な細谷機構の事例と共通している。

2.1.3　$SU(N)$ ゲージ理論における次元簡約と，細谷機構による対称性の破れ

次に，5 次元ゲージ場 $A_M(x, y)$ を $U(1)$ ゲージ場から $SU(N)$ ゲージ場へと拡張し，$M^4 \times S^1$ 上の $SU(N)$ ゲージ場から次元簡約によって M^4 上の有効理論が導かれる場合を考える。このとき上述の例と同様に $A_M(x, y)$ の余剰次元方向成分 $A_y(x, y)$ が定数値をとるとすると，有効理論におけるゲージ対称性が $SU(N)$ ゲージ対称性よりも低いものへと破れるということが生じうる。それが細谷機構による対称性の破れと呼ばれるものであり，本論文の主題に関わるものである。$A_y(x, y)$ が定数値をとる事態としては，$A_y(x, y)$ が真空期待値をもつ事態が考えられる。

　これまで複素スカラー場の理論を事例に選んで説明してきたが，ここではより現実に近い模型として，物質場としてディラック場（フェルミオン）をもつ理論を用いることにする。5 次元時空で，N 成分をもつ $SU(N)$ 基本表現のディラック場 $\psi(x, y)$ を有する $SU(N)$ ゲージ理

論を考える。$\psi(x,y)$ は質量を持たないとする。ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\Gamma^M D_M \psi - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}F_{MN}F^{MN}, \tag{2.26}$$

で与えられる。ψ は時空のローレンツ変換に対して 4 成分スピノルとして変換する N 重項の場であり，$\bar{\psi}$ は次に述べる γ^0 を用いて $\bar{\psi} = i\psi^\dagger\gamma^0$ と定義される ψ のディラック共役である。$\psi^\dagger$ は ψ のエルミート共役である。Γ^M は一般の 4 次元の理論で用いられるガンマ行列（ディラック行列）γ^μ を 5 次元理論用に拡張したもので，γ^μ との間には $(\Gamma^\mu, \Gamma^5) = (\gamma^\mu, \gamma^5)$ の関係がある。$\Gamma^M D_M = \Gamma^0 D_0 + \Gamma^1 D_1 + \Gamma^2 D_2 + \Gamma^3 D_3 + \Gamma^5 D_5$ であり，$D_5 = \partial_5 - igA_5 = \partial_y - igA_y$ である。γ^μ はクリフォード代数の一種で，時空の計量を $\eta^{\mu\nu}$ とした場合に $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ を満たすものとして定義される。ワイル表示（カイラル表示）で表すのがここにおけるような計算では便利であるが，本稿のように時空の計量を $\eta = (-1,1,1,1)$（$\eta^{\mu\nu}$ で表記すれば $\eta^{00} = -1$, $\eta^{jk} = \delta^{jk}$, for $j,k = 1,2,3$）にとった場合，

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu = (I_2, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (-I_2, \vec{\sigma}), \tag{2.27}$$

と書かれる。I_2 は 2×2 の単位行列，$\vec{\sigma}$ はパウリ行列である。γ^5 は

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

で定義される。ゲージ場 $A_M(x,y)$ は $SU(N)$ ゲージ理論では交換子 $[A_M, A_N]$ がゼロとは限らない非可換ゲージ場となり，一般に行列で表される。場の強さ F_{MN} は

$$F_{MN} = \partial_M F_N - \partial_N F_M - ig[A_M, A_N], \tag{2.29}$$

で定義される。なお F_{MN} や A_N における N は $SU(N)$ の N ではなく M と同じく $N = 0,1,2,3,5$ をとる添字（ベクトルの足）である。あまり混乱の恐れはないので慣例的に F_{MN} で書かれる。

余剰次元 y に対して $y \sim y + 2\pi R$ の条件を課して時空を $M^4 \times S^1$ の 5 次元時空とする。円 S^1 を一周するとき，$\mathcal{L}$ は一価でなければならない。つまり $\mathcal{L}(x, y+2\pi R) = \mathcal{L}(x,y)$ でなければならない。この要請を満たす境界条件として

$$A_M(x, y+2\pi R) = UA_M(x,y)U^{-1}, \tag{2.30}$$

$$\psi(x, y+2\pi R) = e^{i\beta}U\psi(x,y), \tag{2.31}$$

$$U \in SU(N), \tag{2.32}$$

をとる。β は実数パラメータであり、$0 \leq \beta < 2\pi$ の範囲をとるものとする。$U = I$（単位行列）であれば，$A_M(x,y)$ は S^1 上で周期的になるが，$SU(N)$ ゲージ理論では一般には $SU(N)$ 行列 U だけひねられていてもよい，ということになる。それでも $\mathcal{L}(x, y+2\pi R) = \mathcal{L}(x,y)$ という要請は満たされるからである。U は境界条件行列とか「ひねり行列」（twist matrix）と呼ばれる。本稿では主として「ひねり行列」の名称を用いることにする。理論はラグランジアン密度とひねり行列によって決まる。ひねり行列はカルツァ・クライン展開のされ方を決定し，ラグランジアン密度は各場（粒子）の運動や相互作用のされ方を決める。第 3 章で述べる本博士論文の主題的研究は，このひねり行列の基本的性質のひとつについて調べたものである。

ここではまず $U = I$ とおいて説明を進める。β については，これまでの例では簡単のために $\beta = 0$ とおいたが，今回は必ずしも 0 ではないとして残しておく。そして $U(1)$ ゲージ理論の例で設定したのと同様に，$A_M(x,y)$ の余剰次元方向成分 $A_y(x,y)$ が定数をとるとする。以上の設定のもとで各場は，

$$\psi(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi^{(n)}(x) \exp\left\{ i\frac{1}{R}\left(n + \frac{\beta}{2\pi}\right) y\right\}, \tag{2.33}$$

$$A_\mu(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_\mu^{(n)}(x) \exp\left(i\frac{n}{R}y\right), \tag{2.34}$$

$$A_y(x,y) = \frac{1}{2\pi g R}\begin{pmatrix} \theta_1 & & & \\ & \theta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta_n \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

と書ける。θ_j $(j = 1, \ldots, n)$ は $\sum_{j=1}^{n} \theta_j = 0 \pmod{2\pi}$，$0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす無次元の実数パラメータとする。その理由は，後述するように $\{\theta_j\}$ がウィルソンライン位相の固有値に対応し，それが $\sum_{j=1}^{n} \theta_j = 0 \pmod{2\pi}$ を満たすからである。（式 (2.79) 参照。なお，より完全な記述ではここで A_y の値として挙げたものは A_y のゼロモードの真空期待値である）。

これらの表式を，これまでと同様に y の積分範囲を $0 \leq y \leq 2\pi R$ とした作用に代入して計算し 4 次元有効理論を得ればよいが，計算は複雑になる（例えば文献 [40] の 3.4 節を参照）。本節における細谷機構の説明ではゲージ場 $A_\mu^{(n)}(x)$ が獲得する質量 M_n の表式が得られれば十分であると考えられるので，ここではより簡便にそれを得る計算として，ゲージ場の運動方程式を用いる計算によってそれを確認する。5 次元の非可換ゲージ場 A_M の真空中の運動方程式は

$$\partial_M F^{MN} - ig[A_M, F^{MN}] = 0, \tag{2.36}$$

で表される（文献 [41] の式 (2.83) を 5 次元に拡張したものである）。ここに式 (2.34)，(2.35) の A_μ および A_y を代入する。任意の行列 B の (j,k) 成分（j 行 k 列目の行列要素）を B_{jk} と書

き，$[A_M, B]$ の (j,k) 成分を $[A_M, B]_{jk}$ と書くことにすると，

$$[A_y, B]_{jk} = \frac{1}{2\pi g R}(\theta_j - \theta_k) B_{jk}, \tag{2.37}$$

が成り立つ。これを用いて式 (2.36) そのものというよりはその各行列成分を計算し，そしてローレンスゲージ（Lorenz gauge）$\partial_\mu A^\mu = 0$ を用いると，

$$\left(\partial_\mu F^{(n)\mu\nu}\right)_{jk} - ig[A^{(n)}_\mu, F^{(n)\mu\nu}]_{jk} - M^2_{n,jk} A^{(n)\nu}_{jk} = 0, \tag{2.38}$$

$$M^2_{n,jk} = \frac{1}{R^2}\left(n - \frac{\theta_j - \theta_k}{2\pi}\right)^2, \tag{2.39}$$

が得られる。ここで $F^{(n)\mu\nu} = \partial^\mu A^{(n)\nu} - \partial^\nu A^{(n)\mu}$ であり，$\left(\partial_\mu F^{(n)\mu\nu}\right)_{jk}$ は $\partial_\mu F^{(n)\mu\nu}$ の (j,k) 成分である。$M_{n,jk} \neq 0$ の場合，これは質量 $M_{n,jk}$ をもつベクトル場 $A^{(n)\nu}_{jk}$ についての運動方程式であるプロカ方程式（の $SU(N)$ 理論版）である。

すべての θ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ が等しい場合，式 (2.39) は $M^2_{n,jk} = n^2/R^2$ となり，$n = 0$ ならば $M^2_{0,jk} = 0$ となる。つまり $A^{(n)\nu}$ のゼロモード $A^{(0)\nu}$ はその行列成分のすべてが質量ゼロの場となって，4 次元有効理論においてゲージ場としてふるまう。しかし一般に $\theta_j \neq \theta_k$ であるような j と k の組がある場合，そこに対応する成分 $M_{0,jk}$ はゼロでなくなる。これによって対称性が破れ，4 次元有効理論における対称性は $SU(N)$ よりも低いものになる。このように θ_j の値によって低次元有効理論における対称性が（自発的に）破れる。各 θ_j の値は後述するようにウィルソンライン位相の真空期待値として決まるとするのが一般的である。

具体例として，5 次元 $SU(3)$ ゲージ理論で各 θ_j $(j = 1, 2, 3)$ として特定の値が与えられた時の理論の振る舞いを 2 例示す。まず $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 0, 0)$ や $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\pm\frac{2}{3}\pi, \pm\frac{2}{3}\pi, \pm\frac{2}{3}\pi)$ のとき，$M^2_{n,jk}$ を (j,k) 成分としてもつ行列 M^2_n は

$$M^2_n = \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} n^2 & n^2 & n^2 \\ n^2 & n^2 & n^2 \\ n^2 & n^2 & n^2 \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

となる。したがって $n = 0$ のモードである $A^{(0)}_\mu$ は質量ゼロの場となり，4 次元有効理論でも $SU(3)$ ゲージ場として振る舞う。つまり対称性の破れは起こらない。なお $\sum_{j=1}^n \theta_j = 0 \pmod{2\pi}$ という制限下ですべての θ_j $(j, k = 1, 2, 3)$ が等しいという条件を満たす $\{\theta_j\}$ は上に書いた 2 種類のみである。次に $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ のとき，行列 M^2_n は

$$M^2_n = \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} n^2 & n^2 & \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \\ n^2 & n^2 & \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 & \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 & n^2 \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

と書ける。このとき，$n=0$ ならば5つの成分がゼロになるが，$n-\frac{1}{2}$ や $n+\frac{1}{2}$ の成分は $n=0$ であってもゼロにはならない。すると $A_\mu^{(0)}$ のうちこれらの成分に対応する成分はゲージ場として不適切であるということになり，$M_{n,jk}$ がゼロである5成分のみで再構成されるゲージ場だけがゲージ場として働くことになる。その結果，4次元有効理論での対称性は $SU(2)\times U(1)$ へと破れる。より詳しく述べると次のようになる。場 $A_\mu(x)$ は $SU(3)$ の生成子 T^a を用いて

$$A_\mu(x)=\sum_{a=1}^{8}A_\mu^a(x)T^a, \tag{2.42}$$

と表すことができ，T^a は例えば

$$T^a=\frac{1}{2}\lambda^a \quad (a=1,\ldots,8), \tag{2.43}$$

$$\lambda^1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda^2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda^4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda^5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda^6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda^7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \lambda^8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}, \tag{2.44}$$

ととれる。このようにとると $A_\mu(x)$ は行列表示で

$$A_\mu=\begin{pmatrix}A_\mu^3+A_\mu^8 & A_\mu^1-iA_\mu^2 & A_\mu^4-iA_\mu^5\\ A_\mu^1+iA_\mu^2 & -A_\mu^3+A_\mu^8 & A_\mu^6-iA_\mu^7\\ A_\mu^4+iA_\mu^5 & A_\mu^6+iA_\mu^7 & -2A_\mu^8\end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

と書ける。なお $A_\mu(x)$ や $A_\mu^a(x)$ を A_μ や A_μ^a と略記し，また T^a で全体にかかる係数 $1/2$ や $1/(2\sqrt{3})$ などは適宜 A_μ^a の再定義によって吸収させた。今の事例では，このように示した成分のうち，$(1,3)$ 成分である $A_\mu^4(x)-iA_\mu^5(x)$ などの4つの成分が質量をもつことになる。そこでそれらを分離し，

$$A_\mu=\begin{pmatrix}A_\mu^3+A_\mu^8 & A_\mu^1-iA_\mu^2 & 0\\ A_\mu^1+iA_\mu^2 & -A_\mu^3+A_\mu^8 & 0\\ 0 & 0 & -2A_\mu^8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & A_\mu^4-iA_\mu^5\\ 0 & 0 & A_\mu^6-iA_\mu^7\\ A_\mu^4+iA_\mu^5 & A_\mu^6+iA_\mu^7 & 0\end{pmatrix}, \tag{2.46}$$

と書くと，この第一項にあたる部分が質量ゼロのゲージ場，第二項にあたる部分が質量をもつベクトル場として振る舞うことになる。言い換えれば，$A_\mu^a(x)$ $(a=1,2,3,8)$ のみを用い，T^a $(a=1,2,3,8)$ のみを生成子として，ゲージ場の再構成を行い第一項のようなものを作ると，

それが 4 次元有効理論でのゲージ場として働くことになるいう問題がある。すると例えば何らかのゲージ変換によって $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},-\frac{2\pi}{3})$ が $(\theta_1',\theta_2',\theta_3')=(0,0,0)$ に変わったとすると，ゲージ変換によって結ばれているのだからこの両者は同じ物理を表すはずだが，4 次元有効理論の対称性は前者では $SU(2)\times U(1)$，後者では $SU(3)$ になるというおかしなことになる。しかしここで効いてくるのがひねり行列 U である。今ここでは $U=I$ とおいているが，ゲージ変換をするとこの U もまた変換される。それを用いて計算すると，結局 4 次元有効理論の対称性はゲージ変換このときその再構成されたゲージ場で書かれた理論は，$SU(2)\times U(1)$ ゲージ理論の形になる。

重要な問題として，A_y の値はゲージ変換によっていくらでも自由に変わってしまうと前と同じになる。それについて次に説明する。

$SU(N)$ の要素 $\Omega(x,y)$ を用いて，$\psi(x,y)$ と $A_M(x,y)$ に対し

$$\psi(x,y)\to\psi'(x,y)=\Omega(x,y)\psi(x,y), \tag{2.47}$$

$$A_M(x,y)\to A_M'(x,y)=\Omega(x,y)A_M(x,y)\Omega(x,y)^{-1}+\frac{i}{g}\Omega(x,y)\partial_M\Omega(x,y)^{-1}, \tag{2.48}$$

$$\Omega(x,y)=\exp\left\{i\sum_{a=1}^{N^2-1}\alpha_a(x,y)T^a\right\}, \tag{2.49}$$

のようなゲージ変換が行われたとする。ここで $\alpha_a(x,y)$ は実数パラメータであり，T^a は $SU(N)$ 群の生成子である。このときひねり行列 U のゲージ変換は，変換後の行列を U' とすると，

$$\psi'(x,y+2\pi R)=e^{i\beta}U'\psi'(x,y), \tag{2.50}$$

を満たせ，という要請から求められる。ここに式 (2.47) を代入し，さらに $\psi(x,y+2\pi R)$ として $\psi(x,y+2\pi R)=e^{i\beta}U\psi(x,y)$ を代入すると，

$$U'=\Omega(x,y+2\pi R)U\Omega(x,y)^{-1}, \tag{2.51}$$

が得られる。これがひねり行列に対するゲージ変換の式である。

$(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},-\frac{2\pi}{3})$ を $(\theta_1',\theta_2',\theta_3')=(0,0,0)$ に変換するゲージ変換は，たとえば

$$\Omega(x,y)=\begin{pmatrix} e^{-i\frac{y}{6R}} & & \\ & e^{-i\frac{y}{6R}} & \\ & & e^{i\frac{y}{3R}} \end{pmatrix}, \tag{2.52}$$

による変換として得られる。この $\Omega(x,y)$ を式 (2.48) に代入すれば，$A_y(x,y)=A_y$ は

$$A_y=\frac{1}{2\pi gR}\begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} & & \\ & \frac{\pi}{3} & \\ & & -\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}\to\quad A_y'=\frac{1}{2\pi gR}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.53}$$

と変換される。このとき U は式 (2.51) を用いて，

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad U' = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{3}} & & \\ & e^{-i\frac{\pi}{3}} & \\ & & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}, \tag{2.54}$$

と変換される。すると $A_\mu(x,y)$ に対する境界条件が次のように変わる。今，$A'_\mu(x,y)$ の (j,k) 成分を $A'_{\mu,jk}(x,y)$ と書き，さらにそれを $A'_{\mu,jk}$ と略記することにする。そしてそれを式 (2.30) に代入して $A'_\mu(x,y)$ についての境界条件を求めると，

$$\begin{aligned} A'_\mu(x,y+2\pi R) &= U' A'_\mu(x,y) U'^{-1} \\ &= U' \begin{pmatrix} A'_{\mu,11} & A'_{\mu,12} & A'_{\mu,13} \\ A'_{\mu,21} & A'_{\mu,22} & A'_{\mu,23} \\ A'_{\mu,31} & A'_{\mu,32} & A'_{\mu,33} \end{pmatrix} U'^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A'_{\mu,11} & A'_{\mu,12} & -A'_{\mu,13} \\ A'_{\mu,21} & A'_{\mu,22} & -A'_{\mu,23} \\ -A'_{\mu,31} & -A'_{\mu,32} & A'_{\mu,33}, \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.55}$$

となる。成分によっては $U = I$ のときと変わらず，

$$A'_{\mu,jk}(x,y+2\pi R) = A'_{\mu,jk}(x,y) \tag{2.56}$$

のままであるが，$(1,3)$ 成分などの 4 つの成分については，

$$A'_{\mu,jk}(x,y+2\pi R) = -A'_{\mu,jk}(x,y) \tag{2.57}$$

となり，負の符号がついて境界条件が変わる。これが質量 $M^2_{n,jk}$ の式を変化させ，対称性の破れを再現することになる。カルツァ・クライン展開を書くと，境界条件が式 (2.56) のように書かれる成分については式 (2.34) と同様に

$$A'_{\mu,jk}(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'^{(n)}_{\mu,jk}(x) \exp\left(i\frac{n}{R}y \right), \tag{2.58}$$

であるが，境界条件が式 (2.57) のように書かれる成分については

$$A'_{\mu,jk}(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'^{(n)}_{\mu,jk}(x) \exp\left(i\frac{n \pm \frac{1}{2}}{R}y \right), \tag{2.59}$$

となり，右辺の指数関数の中の n が $n \pm 1/2$ へと変わる。ここで複号 $\pm$ は $+$ と $-$ のどちらをとってもよいという意味で用いた。これを用いて，式 (2.39) を導いたのと同じ計算をすると，ちょうど式 (2.39) の右辺の n を $n \pm \frac{1}{2}$ で置き換えたものになって，

$$M'^2_{n,jk} = \frac{1}{R^2}\left(n \pm \frac{1}{2} - \frac{\theta'_j - \theta'_k}{2\pi} \right)^2, \quad \text{for } (jk) = (13, 23, 31, 32), \tag{2.60}$$

となる。その他の成分については式 (2.39) と同じである。したがって $(\theta_1', \theta_2', \theta_3') = (0, 0, 0)$，$U' = \mathrm{diag}(e^{-i\pi/3}, e^{-i\pi/3}, e^{2i\pi/3})$ のときの $M_{n,jk}'^2$ を (j,k) 成分として並べた行列 $M_n'^2$ は，

$$M_n'^2 = \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} n^2 & n^2 & \left(n \pm \frac{1}{2}\right)^2 \\ n^2 & n^2 & \left(n \pm \frac{1}{2}\right)^2 \\ \left(n \pm \frac{1}{2}\right)^2 & \left(n \pm \frac{1}{2}\right)^2 & n^2 \end{pmatrix}, \tag{2.61}$$

となる。ここで 4 つの成分に見られる複号 $\pm$ は同順ではない。つまりそれぞれ独立に $+$ と $-$ のどちらをとってもよい。これは式 (2.41) とほぼ同じであり，4 次元有効理論における対称性はやはり $SU(2) \times U(1)$ へと破れる。つまりゲージ変換前の $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$，$U = I$ のときと同じであり，ゲージ変換の前後で対称性は変わらない。

このように低次元有効理論での対称性は A_y の定数値とひねり行列 U とによって決まる。この機構を細谷機構という。一般的には，後述するように A_y と U を組み合わせた物理量のひとつとしてウィルソンライン位相というものが定義されており，このウィルソンライン位相の値によって対称性が決まるものとして細谷機構は表現される。

この小節で述べた計算について整理・付言しておくと，次のようになる。対称性の破れが生じる場合，それは A_y の定数値と U の要素によってゲージ場のカルツァ・クラインモード $A_\mu^{(n)}$ の質量が，いくつかの成分についてはゼロでなくなることによる。質量 $M_{n,jk}$ に対する A_y の定数値からの寄与は，端的に言えば，ラグランジアンないし運動方程式の中の $[A_y, A_\mu]$ の項に由来する。この項に由来して $M_{n,jk}$ の中に $(\theta_j - \theta_k)/(2\pi R)$ の部分が入ってくる。A_y が定数でなく例えば $A_y(x)$ のような量であるならば，$[A_y(x), A_\mu(x)]$ は $A_y(x)$ と $A_\mu(x)$ との相互作用項になる。しかし A_y が定数をとることで $A_\mu(x)$ の質量項（の一部）の形になるのである。あるいは別の言い方をすれば，$A_\mu(x)$ が定数部分 A_μ^c とそのまわりのゆらぎの部分 $A_\mu^q(x)$ とに分けられて $A_\mu(x) = A_\mu^c + A_\mu^q(x)$ と書かれたとき，$[A_y(x), A_\mu(x)]$ の一部 $[A_y^c, A_\mu(x)]$ が $A_\mu(x)$ の質量項を作る，とも言える。これはちょうどヒッグス機構の計算において，スカラー場 $\Phi(x)$ とゲージ場 $A_\mu(x)$ との相互作用項 $\mathcal{L}_{\Phi A} \propto \Phi(x)^2 A_\mu(x) A(x)^\mu$ の一部が，$\Phi(x)$ が真空期待値 v とそのまわりにゆらぐ場との組み合わせとして書かれることにより，$v^2 A_\mu(x) A^\mu(x)$ すなわち $A_\mu(x)$ の質量項となる，というのと似ている。実際，A_y がヒッグス場としてのはたらきをするゲージ・ヒッグス統合模型というものが開発されており，精力的に研究されている。一方ひねり行列 U のほうは，$M_{n,jk}$ の中でカルツァ・クラインモードの番号 n に依存する項を変化させる。それは A_M の各成分のカルツァ・クライン展開のされ方を決定することに由来する。短くまとめれば，A_y はラグランジアンの中の $[A_y, A_\mu]$ の項によって，U は A_M のカルツァ・クライン展開のされ方を決定することによって，$A_{\mu,jk}^{(n)}$ の質量 $M_{n,jk}$ に寄与し，それによって低次元有効理論での対称性の破れが起こりうる。

なおフェルミオン場 $\psi(x,y)$ のカルツァ・クラインモード $\psi^{(n)}(x)$ の質量は，次のようになる。この場合もやはり運動方程式を用いて求めるのが簡便である。5 次元での自由なディラック方程式は $\eta=(-1,1,1,1,1)$ の表記のもとで，

$$(\Gamma^M D_M - m)\psi(x,y) = 0, \tag{2.62}$$

と書ける。Γ^M $(M=0,1,2,3,5)$ は式 (2.26) で用いたのと同じく 5 次元理論用に拡張されたガンマ行列で，4 次元のガンマ行列 γ^μ $(\mu=0,1,2,3)$ および γ^5 との間には $(\Gamma^\mu,\Gamma^5)=(\gamma^\mu,\gamma^5)$ の関係がある。また $D_5=D_y$ であり，m は $\psi(x,y)$ の質量である。ここに $\psi(x,y)$ のカルツァ・クライン展開として式 (2.33) を代入する。しかし $\psi(x,y)$ がディラック方程式を満たすとき，それはクライン・ゴルドン方程式

$$(D^M D_M - m^2)\psi(x,y) = 0, \tag{2.63}$$

も満たすので，こちらを使って求めることもできる。そちらのほうが計算はスムーズになる。結果，基本表現 $\psi^{(n)}(x)$ の第 j 成分（$j=1,2,\ldots,N$）の質量 $m_{n,j}$ は,

$$m_{n,j}^2 = m^2 + \frac{1}{R^2}\left(n + \frac{\beta-\theta_j}{2\pi}\right)^2, \tag{2.64}$$

と導かれる。ディラック方程式を使って求める場合は，たとえば文献 [40] の第 5 章第 2 節と同じようにして求められる。質量 $m_{n,j}$ もまた n と θ_j（後述するウィルソンライン位相）からの寄与を受けることが分かる。また β からの寄与も受けている。

2.1.4　ウィルソンライン位相を用いた計算

ゲージ変換で A_y の値が変わっても，ひねり行列 U がそれに応じてある意味で相補的に変わり，結局導かれる対称性は変わらない。このことは，何か A_y と U とを組み合わせてできるゲージ不変量があり，そのゲージ不変量に対応して対称性が決まるのではないかということを予想させる。実際にそのようにして対称性の計算を洗練化したものが見出されている。それが次に述べるウィルソンライン位相を用いた計算である。

始点 x_i から終点 x_f を結ぶ経路 C に沿った順序付けされた線積分，ウィルソン線積分（ウィルソンライン積分）を次のように定義する。

$$\begin{aligned} W(x_i,x_f;C) &= P\exp\left\{-ig\int_C dx^M A_M(x,y)\right\} \\ &\equiv \lim_{N\to\infty} W(x_0,x_1)W(x_1,x_2)\cdots W(x_{N-1},x_N), \end{aligned}$$

$$W(x_{j-1},x_j)=1-ig\Delta x^M_{j-1}A_M(x_j). \tag{2.65}$$

ここで，経路 C を N 個に分割し，$x_0=x_i\to x_1\to x_2\to\cdots\to x_N=x_f$，$\Delta x_j=x_j-x_{j-1}$ としている。非可換ゲージ理論では A_M は積の順序に注意しなければならないため，上のように積の順序に注意をうながす記号 P を用いた定義がされている（P は経路順路（path-ordering）作用素などと呼ばれる）。極限 $N\to\infty$ で $\Delta x_j\to 0$ である。このウィルソン線積分のゲージ変換を考える。式 (2.48) にしたがって $A_M(x,y)$ の $SU(N)$ ゲージ変換が行われたとすると，$O(\Delta x)$ で，

$$W(x_{j-1},x_j)\to\Omega(x_{j-1})W(x_{j-1},x_j)\Omega(x_j)^{-1}, \tag{2.66}$$

と変換される。これを用いるとウィルソン線積分 (2.65) は,

$$W(x_i,x_f;C)\to\Omega(x_i)W(x_i,x_f;C)\Omega(x_f)^{-1}, \tag{2.67}$$

のように共変的に変換されることが分かる。

ここで，S^1 を 1 周するウィルソン線積分に U をかけた,

$$\begin{aligned}\hat{W}(x)&=W(x)U,\\ W(x)&=P\exp\left\{-ig\int_0^{2\pi R}dyA_y(x,y)\right\},\end{aligned} \tag{2.68}$$

を考える。ウィルソン線積分の経路 C を閉経路にとったもの（もしくはその上でそれのトレースをとった $\mathrm{Tr}\,W$）をウィルソンループと呼ぶが,「S^1 を 1 周する」という経路も閉経路の一種と言えるので，$W(x)$ はウィルソンループの一種である。$\hat{W}(x)$ には特に定着した名称はないが，その固有値，もしくはその固有値を $e^{-i\theta_j(x)}$ と書いた時の位相部分 $\theta_j(x)$ は，ウィルソンライン位相と呼ばれている（厳密には $\theta_j(x)$ のほうであろうと思われるが，慣例的に $\hat{W}(x)$ の固有値そのものもウィルソンライン位相と呼ばれている）。また，特に $\theta_j(x)$ が定数 $\theta_j(x)=\theta_j$ であるとき,「（余剰次元上の）アハロノフ・ボーム位相」と呼ばれることもある [40]。この $\hat{W}$ のゲージ変換を見る。式 (2.51) と (2.67) を用いると,

$$\begin{aligned}\hat{W}(x)&\to\left\{\Omega(x,0)W(x)\Omega(x,2\pi R)^{-1}\right\}\left\{\Omega(x,2\pi R)U\Omega(x,0)^{-1}\right\}\\ &=\Omega(x,0)\hat{W}(x)\Omega(x,0)^{-1},\end{aligned} \tag{2.69}$$

となる。ここから，$\hat{W}(x)$ の固有値すなわちウィルソンライン位相はゲージ不変量であることがわかる。

この $\hat{W}(x)$ を使うと，低次元有効理論での対称性が比較的簡単に導かれることが分かっている。$A_y(x,y)$ が定数値 A_y^c をとったとする。このとき $\hat{W}(x)$ は,

$$\hat{W}(x) = \hat{W} = P\exp\left\{-ig\int_0^{2\pi R} dy A_y^c\right\} U, \tag{2.70}$$

と書ける。すると低次元有効理論での対称性は，この $\hat{W}$ と交換する生成子，すなわち

$$\mathcal{H}^{\rm sym} = \{T^a; [\hat{W}, T^a] = 0\} \tag{2.71}$$

に属する生成子によって作られる，ということが分かっている（証明は割愛する）。ここでさらに，A_y^c をゼロにするようなゲージ変換が行われたとする。このゲージ変換に際して U は U' という行列へと変換されたとすると，$\hat{W}$ は $\hat{W} \to \hat{W}' = U'$ と変換される。すると式 (2.71) は，$\hat{W}$ を $U' \equiv U^{\rm sym}$ で置き換えて,

$$\mathcal{H}^{\rm sym} = \{T^a; [U^{\rm sym}, T^a] = 0\} \tag{2.72}$$

へと簡略化されることになる。これが細谷機構による対称性の破れを導入するにあたって広く用いられている公式である。ただし，次節で述べるオービフォルドの場合のように，U 以外にもひねり行列が出てくる場合，$\mathcal{H}^{\rm sym}$ を構成する T^a には，それら全てとも交換すべしという条件が付される（具体例は次節を参照）。本博士論文の主題的内容である第 3 章の末尾でも，これを用いた考察を行う。

具体例として，先述した例のひとつ，5 次元の $SU(3)$ ゲージ模型で $A_y(x,y)$ が定数 $A_y \propto {\rm diag}(\pi/3, \pi/3, -2\pi/3)$ をとり，4 次元有効理論での対称性が $SU(2)\times U(1)$ へ破れた例を取り上げる。そこでは

$$\begin{aligned} A_y(x,y) &= A_y = \frac{1}{2\pi g R}\begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} & & \\ & \frac{\pi}{3} & \\ & & -\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix}, \\ U &= I, \end{aligned} \tag{2.73}$$

であったから，$\hat{W}(x)$ は,

$$\hat{W}(x) = \hat{W} = \exp\left\{-i\begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} & & \\ & \frac{\pi}{3} & \\ & & -\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{3}} & & \\ & e^{-i\frac{\pi}{3}} & \\ & & e^{i\frac{2\pi}{3}}\end{pmatrix}, \tag{2.74}$$

となる。これを用い，$[\hat{W}, T^a] = 0$ を満たす T^a をピックアップしていく。すると元の高次元模型の対称性を形成していた $SU(3)$ の生成子のうち，式 (2.74) の $\hat{W}$ と交換するのは,

$$T^a = \frac{1}{2}\lambda^a,$$

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \tag{2.75}$$

の 4 つであることが分かる。したがってこの 4 つの T^a を生成子として作られる対称性が，低次元有効理論の対称性である。そしてそれは $SU(2) \times U(1)$ であることが分かる。実際，これらを用いて作られるゲージ場 A_μ は，

$$A_\mu = \sum_{a=1,2,3,8} A_\mu^a T^a = \begin{pmatrix} A_\mu^3 + A_\mu^8 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 & 0 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 + A_\mu^8 & 0 \\ 0 & 0 & -2A_\mu^8 \end{pmatrix}, \tag{2.76}$$

となり，これは式 (2.46) の第一項と同じである。他方，$[U^{\mathrm{sym}}, T^a]$ を用いた導出は次のようになる。式 (2.73) の A_y をゼロにするようなゲージ変換を行ったとき，式 (2.73) の U すなわち $U = I$ は，式 (2.54) で見たように，

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \to \quad U' = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{3}} & & \\ & e^{-i\frac{\pi}{3}} & \\ & & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \equiv U^{\mathrm{sym}}, \tag{2.77}$$

と変換される。この U^{sym} と交換する T^a を探すと，当然ながら式 (2.75) に示したものと同じになる。したがってやはり対称性は $SU(2) \times U(1)$ になる。

なお，$U = I$ のもとで A_y が

$$A_y(x, y) = A_y(x) = \frac{1}{2\pi gR} \begin{pmatrix} \theta_1(x) & & & \\ & \theta_2(x) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta_n(x) \end{pmatrix}, \tag{2.78}$$

と（対角型に）書かれるとき，$\hat{W}(x)$ は上の例と同様に

$$\hat{W}(x) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1(x)} & & & \\ & e^{-i\theta_2(x)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-i\theta_n(x)} \end{pmatrix}, \tag{2.79}$$

となり，A_y の表記に用いた $\theta_j(x)$ はそのままウィルソンライン位相を表すものになることが分かる。逆に言えば，A_y はウィルソンライン位相 $\theta_j(x)$ を用いて式 (2.78) のように表すことができる，ということにもなる。（ただし「$U = I$ のもとでの」ウィルソンライン位相なので，そこに注意を払うならば「狭義の」ウィルソンライン位相ということになろうか）。$\theta_j(x)$ が定

数 θ_j をとっても同じである。他方，一般に A_M は理論の対称性を担っている生成子 T^a を用いて $A_M(x,y)=\sum_a A_M^a(x,y)T^a$ と書かれる。そしてそのように T^a の（実数係数の）線形結合で書かれたものを指数関数の肩に乗せたものは，式 (2.49) の Ω もそうであるように，その T^a が作る群の要素となる。式 (2.74) に見られるように $\hat{W}(x)$ は A_y に比例する項を指数関数の肩に乗せたものになるから，理論の対称性が $SU(N)$ のとき，$\hat{W}(x)$ は $SU(N)$ の要素となる。すると $\hat{W}(x)$ はその行列式が 1 でなければならないから，$\sum_{j=1}^n \theta_j(x)=0 \pmod{2\pi}$ でなければならない。式 (2.35) のところで $\sum_{j=1}^n \theta_j=0 \pmod{2\pi}$ であると述べたのは，その理由による。なお，式 (2.78) で $\theta_j(x)$ をより一般的に $\theta_j(x,y)$ とおいた場合，つまり $\theta_j(x,y)$ が y に依存して変化する場合は，$\theta_j(x,y)$ のゼロモード $\theta_j^{(0)}(x)$ がウィルソンライン位相と一致する。

2.1.5 有効ポテンシャルによる θ_j の決定

$U=I$ のとき，ゲージ場 $A_M(x,y)$ の低次元有効理論におけるモード $A_\mu^{(n)}(x)$ の (j,k) 成分の質量 $M_{n,jk}$ は式 (2.39) のように表され，ウィルソンライン位相 $\{\theta_j(x)\}$ が定数値をとったものである $\{\theta_j\}$ による寄与を受ける。この $\{\theta_j\}$ は任意ではなく，$\{\theta_j\}$ に依存する有効ポテンシャル $V_{\rm eff}(\theta_j)$ を最小にするものとして決まるとするのが一般的である。実際それは自然な仮説であると思われる。なお $V_{\rm eff}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$ を $V_{\rm eff}(\theta_j)$ と略記した。

何らかのボソン場もしくはフェルミオン場 $\phi(x)$ の期待値 $\langle\phi(x)\rangle = \langle\Psi|\phi(x)|\Psi\rangle$ が定数 $\langle\phi(x)\rangle = \phi_c$ をとったとき，有効ポテンシャル $V_{\rm eff}(\phi_c)$ は状態 $|\Psi\rangle$ での最小のエネルギー密度に対応する（例えば文献 [40] の 4.2 節などを参照）。そしてハミルトニアンの基底状態（真空状態）を $|\Psi_0\rangle$ とし，他方 $V_{\rm eff}(\phi_c)$ の最小値を与える ϕ_c を $\phi_c^{\rm min}$ とすると，$\langle\Psi_0|\phi(x)|\Psi_0\rangle=\phi_c^{\rm min}$ が成り立つ。つまり有効ポテンシャルが最小値となる状態は，ハミルトニアンの基底状態（真空状態）に対応する。$\phi_c^{\rm min}$ を $\phi(x)$ の真空期待値と呼ぶことにする。

$V_{\rm eff}(\phi_c)$ を評価する方法のひとつとして，ループ展開（$\hbar$ 展開）と呼ばれる摂動論的な方法に従うと，$V_{\rm eff}(\phi_c)$ は

$$V_{\rm eff}(\phi_c)=V_0(\phi_c)+V_{\rm eff}^{1\,{\rm loop}}(\phi_c)+O(\hbar^2), \tag{2.80}$$

と書ける。本稿ではここまで、プランク定数 $\hbar$ と光速を 1 とする自然単位系を用いてきたが、ここでは、ループ展開を用いた有効ポテンシャルの議論をするために、一時的にプランク定数 $\hbar$ を復活することにする。$V_0(\phi_c)$ は古典的（tree）レベルでのポテンシャルであり，ラグランジアン密度の中に明示的な $\phi(x)$ のポテンシャル項があればそれに $\phi(x)=\phi_c$ を代入したものになる。たとえば $\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x)-V_0(\phi)$，$V_0(\phi)=\frac{1}{2}m^2\phi(x)^2+(\lambda/4!)\phi(x)^4$ と書かれ

る ϕ^4 理論の場合，$V_0(\phi_c)=\frac{1}{2}m^2\phi_c^2+(\lambda/4!)\phi_c^4$ である。$V_{\mathrm{eff}}^{1\,\mathrm{loop}}(\phi_c)$ は 1 ループ有効ポテンシャルと呼ばれる $O(\hbar)$ の項であり，一般に

$$V_{\mathrm{eff}}^{1\,\mathrm{loop}}(\phi_c)=\hbar\sum\mp\frac{i}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ln\left\{p^2+m(\phi_c)^2-i\epsilon\right\}, \tag{2.81}$$

という公式で与えられる。先述のように $\hbar$ を回復した。$d^4p=dp^0dp^1dp^2dp^3$ であり，積分は各 p^μ $(\mu=0,\cdots,3)$ ごとに $-\infty$ から ∞ までとる。被積分関数の中の p^2 は $p^2=\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ であり、計量 $\eta=(-1,1,1,1)$ のもとでは $p^2=-(p^0)^2+(p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2$ である。符号 $\mp$ は ϕ と結合する粒子の種類に対応し，ボソンならマイナス，フェルミオンならプラスである。$m(\phi_c)$ は $\langle\phi\rangle=\phi_c$ のときの有効質量である。和は全ての自由度に及ぶ。例えばディラックフェルミオンに対しては，スピノルの 4 個の自由度があるので，4 倍の因子がかかる。つまり式 (2.81) の中の記号 $\sum$ が係数 4 に置き換わる。$\hbar\to 0$ の極限をとると，$V_{\mathrm{eff}}(\phi_c)\to V_0(\phi_c)$ となる。$\hbar\neq 0$ とすると $V_{\mathrm{eff}}^{1\,\mathrm{loop}}(\phi_c)$ など $O(\hbar)$ 以降の項が入ってくる。こうしたことからも，有効ポテンシャルの最小値は量子効果も全て取り入れた上での系の最小エネルギー密度と対応していると考えられる。

$U=I$ のときの $V_{\mathrm{eff}}(\theta_j)$ はこれを用いて次のように表せる。5 次元時空の $SU(N)$ ゲージ理論を考え，$SU(N)$ 基本表現のディラック場 $\psi(x,y)$ と 5 次元ゲージ場 $A_M(x,y)$ があるとする。ラグランジアン密度は式 (2.26) で与えられる。ただしここではそれを少し拡張して，$\psi(x,y)$ は 1 個ではなく N_f 個あるとする。したがってディラックの運動項の部分は N_f 個の $\psi(x,y)$ それぞれについて書かれたものの合計になる。またより一般的に $\psi(x,y)$ の質量項 $-m\bar{\psi}\psi$ も入れることにする。このとき $V_{\mathrm{eff}}^{1\,\mathrm{loop}}(\theta_j)$ は公式 (2.81) を用い，式 (2.39) の $M_{n,jk}^2$ と，式 (2.64) の $m_{n,j}^2$ を用いて，

$$\begin{aligned}
&V_{\mathrm{eff}}^{1\,\mathrm{loop}}(\theta_j)\\
&=-3\sum_{j,k=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \ln\left\{p^2+M_{n,jk}^2-i\epsilon\right\}\\
&\qquad+4N_f\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \ln\left\{p^2+m_{n,j}^2-i\epsilon\right\},
\end{aligned} \tag{2.82}$$

と表せる。第一項は $A_\mu^{(n)}$ たちからの寄与であり，符号「−」は，それらがボソンであることに由来する。係数 3 はそれらの自由度である。$M_{n,jk}=0$ であるような $A_{\mu,jk}^{(n)}(x)$ はゲージ場なので自由度は 2 であるが，それは省略した。そこからの寄与は式 (2.82) の中で $M_{n,jk}=0$ とおいた項からの寄与となるが，それは θ_j に依存しない定数項となる。したがって一般的には省

かれる。そのため多少不正確でも構わない，と判断した。第二項は $\psi^{(n)}(x)$ たちからの寄与である。

$V_{\rm eff}(\theta_j)$ における古典的（tree）レベルでのポテンシャルはゼロとおくことにする。$V_{\rm eff}(\theta_j)$ を θ_j に依存した有効ポテンシャルととらえると，古典的（tree）レベルでのポテンシャルに対する θ_j の寄与はゼロだからである。それはローレンツ不変性の要請により $\langle A_\mu\rangle = 0$ であるため（任意のローレンツ変換 ${\Lambda_\mu}^\nu$ に対し $\langle A_\mu\rangle = {\Lambda_\mu}^\nu\langle A_\nu\rangle$ を満たす定数ベクトル $\langle A_\mu\rangle$ は $\langle A_\mu\rangle = 0$ のみである），$\langle F_{MN}(x,y)\rangle = 0$ となることによる。したがって

$$V_{\rm eff}(\theta_j) = V_{\rm eff}^{1\,\rm loop}(\theta_j) + O(\hbar^2) \tag{2.83}$$

とする。

適当な正則化を用いて p についての積分を実行し，$M^2_{n,jk}$ および $m^2_{n,j}$ に式 (2.39) および (2.64) を代入して n についての無限和を実行すると，うまいことに $V_{\rm eff}^{1\,\rm loop}(\theta_j)$ は収束することが分かる。$V_{\rm eff}^{1\,\rm loop}(\theta_j)$ は,

$$\begin{aligned} V_{\rm eff}^{1\,\rm loop}(\theta_j) =& \frac{3}{64\pi^6R^4}\left\{-3\sum_{j,k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\theta_j-\theta_k)}{n^5}\right. \\ &\left. +4N_f\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\theta_j-\beta_j)}{n^5}B_{5/2}(2\pi Rnm_f)\right\} + (\text{const}), \end{aligned} \tag{2.84}$$

$$B_\nu(z) = \frac{z^\nu K_\nu(z)}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}, \quad B_\nu(0) = 1, \tag{2.85}$$

となる。ここで $K_\nu(z)$ は ν 次の変形ベッセル関数であり，$\Gamma(\nu)$ はガンマ関数である。式 (2.84) を導く計算の詳細は複雑であり，また本論文の主題に関係するものではないので割愛する。文献 [40] の付録 B に詳しく説明されている。n についての無限和は非常に速く収束し，$n=1$ の項だけでよく近似できる。

細谷機構では，4 次元有効理論での対称性を決める $\{\theta_j\}$ は，この $V_{\rm eff}^{1\,\rm loop}(\theta_j)$ を最小化する $\{\theta_j\} = \{\theta_j\}^{\rm min}$ であると考える。実際それは自然な仮説であると思われる。そして典型的には $V_{\rm eff}^{1\,\rm loop}(\theta_j)$ は有限となり，それを最小にするような $\{\theta_j\} = \{\theta_j\}^{\rm min}$ というものが評価可能である。実際，有効ポテンシャルが有限の繰り込まれた結合定数で書かれている場合には，発散を免れるということが示されている [13, 14]。

式 (2.84) で $N_f = 0$ とおくと，フェルミオンがないゲージ場だけの理論での $V_{\rm eff}^{1\,\rm loop}(\theta_j)$ となるが，この場合それを最小にする $\{\theta_j\}$ はすべての θ_j が等しくなるようなもの，たとえば $SU(3)$

ゲージ理論なら $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=(0,0,0)$ または $(\pm\frac{2\pi}{3},\pm\frac{2\pi}{3},\pm\frac{2\pi}{3})$ （複号同順）である。先述したようにウィルソンライン位相 θ_j には $\sum_{j=1}^{N}\theta_j=0 \pmod{2\pi}$ という制限があるから，この 2 種類である。この場合，式 (2.40) のところで見たように，対称性の破れは生じない。一般に理論にゲージ場しか存在しない場合は細谷機構による対称性の破れは生じない。対称性の破れが生じうるのは，一般にフェルミオン場などその他の場が存在する場合である。そして対称性がどのようなものになるのかは，それらの場の構成（何個のフェルミオン場があるか，それは基本表現のフェルミオン場か随伴表現のフェルミオン場か，など）によって決まる。ただ，2.1.3 節で述べたような，ラグランジアン密度が $SU(N)$ 基本表現のディラック場を用いて式 (2.26) で書かれる簡潔な模型の場合，実は対称性の破れは生じない。このとき $V_{\rm eff}^{\rm 1\,loop}(\theta_j)$ は式 (2.84) のように書かれるが，その $V_{\rm eff}^{\rm 1\,loop}(\theta_j)$ を最小にする $\{\theta_j\}$ は $SU(3)$ の場合，

$$(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\begin{cases}(-\frac{2}{3}\pi,-\frac{2}{3}\pi,-\frac{2}{3}\pi) & \text{for } 0<\beta<\frac{2}{3}\pi,\\ (0,0,0) & \text{for } \frac{2}{3}\pi<\beta<\frac{4}{3}\pi,\\ (\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi) & \text{for } \frac{4}{3}\pi<\beta<2\pi,\end{cases} \tag{2.86}$$

となる。$\beta=0,\pm\frac{2}{3}\pi$ のときは，二つの極小値が縮退する。いずれの場合も $SU(3)$ ゲージ対称性は保持される。2.1.3 節では計算例として $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},-\frac{2\pi}{3})$ のときに対称性が $SU(2)\times U(1)$ に破れることを示したが，これは $V_{\rm eff}^{\rm 1\,loop}(\theta_j)$ を最小にする $\{\theta_j\}$ ではない。したがって $\{\theta_j\}$ が $V_{\rm eff}^{\rm 1\,loop}(\theta_j)$ を最小にするものとして決まるとする完全な細谷機構の説明においては，ラグランジアン密度が $SU(N)$ 基本表現のディラック場を用いて式 (2.26) で書かれる理論の対称性が $SU(2)\times U(1)$ に破れることはない。対称性が破れる例としておそらく最も簡潔なものは，フェルミオン場 $\psi(x,y)$ を $SU(N)$ 基本表現でなく $SU(N)$ 随伴表現のものとした場合に得られる。[2] 本稿では割愛したが $SU(N)$ 随伴表現のフェルミオンについても同様にカルツァ・クライン質量を計算でき，これを公式 (2.81) に用いて計算すると，式 (2.82) および (2.84) と同様にして $V_{\rm eff}^{\rm 1\,loop}(\theta_j)$ に対する $SU(N)$ 随伴表現フェルミオンからの寄与を計算することができる。そしてその随伴表現フェルミオンについての β を 0 とおき，また 5 次元において零質量であるとすると，$V_{\rm eff}^{\rm 1\,loop}(\theta_j)$ を最小化する $\{\theta_j\}$ として $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=(0,\frac{2\pi}{3},-\frac{2\pi}{3})$（およびその置換）が得られる。このとき 4 次元有効理論の対称性を計算すると $U(1)\times U(1)$ となり，5 次元での $SU(3)$ 対称性が破れることが分かる。また，その随伴表現フェルミオンが 5 次元理論の段階で特定の範囲の質量をもつとすると，$SU(2)\times U(1)$ に破れる模型になる。一般に，フェルミオン場について様々に設定を変えてみると，豊富な対称性の破れのパターンが実現する。

[2] 随伴表現フェルミオンは，ゲージ群の生成子の随伴表現を $(T^a)_{bc}=if_{abc}$ と書くとすると（f_{abc} は構造定数），$\psi(x)_{bc}=\sum_a\psi(x)^a(T^a)_{bc}$ で与えられる。ここで $(T^a)_{bc}$ と $\psi(x)_{bc}$ はそれぞれ行列 T_a と行列 $\psi(x)$ の b 行 c 列目の成分であり，$\psi(x)^a$ は複素数である。$\psi(x)$ は $\psi(x)\to\psi'(x)=\Omega\psi(x)\Omega^\dagger$，$\Omega=(e^{i\sum_a\theta^aT^a})$ と変換する。θ^a は適当なパラメータである。

境界条件を決めるひねり行列 U が $U \neq I$ である場合，カルツァ・クライン質量 $M_{n,jk}$ や $m_{n,j}$ を表した式 (2.39) や (2.64) の中で n の部分がたとえば式 (2.60) の例のように $n \pm 1/2$ などと置き換わる。随伴表現フェルミオン等でも同様である。それによって $V_{\text{eff}}^{1\,\text{loop}}(\theta_j)$ の表式が変わり，それを最小にする $\{\theta_j\}$ も変わる。したがって低次元有効理論での対称性が変わる。つまり 1 ループ有効ポテンシャルは U にも依存するから，$V_{\text{eff}}^{1\,\text{loop}}(\theta_j; U)$ と書ける。さらに β への依存性にも注意を向けると，$V_{\text{eff}}^{1\,\text{loop}}(\theta_j; U, \beta)$ と書ける。しかし重要な性質として，ある $\{\theta_j\}$ がゲージ変換によって $\{\theta'_j\}$ へと変換され，それとともに U が U' へと変換されたとすると，

$$V_{\text{eff}}^{1\,\text{loop}}(\theta_j; U, \beta) = V_{\text{eff}}^{1\,\text{loop}}(\theta'_j; U', \beta), \tag{2.87}$$

となることが分かっている。境界条件 $\{U, \beta\}$ で，$V_{\text{eff}}^{1\,\text{loop}}(\theta_j; U, \beta)$ が $\{\theta_j^{\text{min}}\}$ で最小になったとすると，境界条件 $\{U', \beta\}$ での $V_{\text{eff}}^{1\,\text{loop}}(\theta'_j; U', \beta)$ は $\{\theta_j'^{\text{min}}\}$ で最小となる。このこともまた，ゲージ変換によって $\{\theta_j\}$ が変化しても，細谷機構によって導かれる対称性に変化はないことを保証する。例えば $SU(3)$ ゲージ理論で $U = I$ のもとで $V_{\text{eff}}^{1\,\text{loop}}(\theta_j; U, \beta)$ を最小にする $\{\theta_j^{\text{min}}\}$ が $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ となり，それによって対称性の破れが結論される場合を考える。ゲージ変換によりその $\{\theta_j^{\text{min}}\}$ が $(\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3) = (0, 0, 0)$ へと変換されたとすると，$U = I$ のままでは対称性の破れが生じないことになるが，2.1.3 節や 2.1.4 節で見たように，$U = I$ は $U' \neq I$ へと変換され，導かれる対称性はゲージ変換前のものと変わらない。このときその $\{\theta'_j\}$ と U' が $V_{\text{eff}}^{1\,\text{loop}}(\theta'_j; U', \beta)$ を最小にするものでなかったとすると,「有効理論の対称性は有効ポテンシャルを最小にするウィルソンライン位相の組で決まる」とする細谷機構の説明に齟齬が生じることになるが，そうはならないことを式 (2.87) が保証している。

2.1.6 S^1 における細谷機構のまとめと，ヒッグス機構との比較

以上で余剰次元が S^1 であるときの対称性の破れの説明とする。それは境界条件とゲージ場の余剰次元方向成分を組み合わせて定義されるウィルソンライン位相というものがあり，そのウィルソンライン位相が定数値をとったときに 4 次元有効理論では対称性の破れが生じうるというものである。ウィルソンライン位相の定数値は有効ポテンシャルを最小にするものとして決まる。それはウィルソンライン位相の真空期待値と考えられる。このようにウィルソンライン位相が真空期待値をとることによって対称性の（自発的）破れが生じうる機構を細谷機構という。ただし，境界条件すなわちひねり行列 U と β をウィルソンライン位相と同じように何らかの動力学的過程（dynamics）の結果として理論的に決定するような機構は見出されていない。現状では研究者がその時々の理論的動機に応じて任意に設定している状況である。これは「任意性問題」（arbitrarity problem）と呼ばれ，長年の未解決問題となっている。

本節の最後として，細谷機構とヒッグス機構との類似点と相違点について述べる。まず 2.1.3 節の終盤で付言したように，対称性の破れが生じる場合，それは A_y の定数値と U の要素によって $A_\mu^{(n)}$ の質量が，いくつかの成分についてはゼロでなくなることによる，と言える。A_y はラグランジアンの中の $[A_y, A_\mu]$ の項によって，U は A_M のカルツァ・クライン展開のされ方を決定することによって，$A_{\mu,jk}^{(n)}$ の質量 $M_{n,jk}$ に寄与し，それによって低次元有効理論での対称性の破れが起こりうる。このうち A_y による寄与のほうは，ヒッグス機構による対称性の破れのプロセスと類似している。A_y が例えば $A_y(x)$ のような普通の場であるならば，$[A_y(x), A_\mu(x)]$ は $A_y(x)$ と $A_\mu(x)$ との相互作用項になる。しかし A_y が定数であったり，あるいは定数部分 A_μ^c とそのまわりのゆらぎの部分 $A_\mu^q(x)$ とに分けられて $A_\mu(x) = A_\mu^c + A_\mu^q(x)$ と書かれたとき，$[A_y(x), A_\mu(x)]$ の一部 $[A_y^c, A_\mu(x)]$ が $A_\mu(x)$ の一次の項となり，そこから質量項が作られていく。具体的にはそれが自乗されたり $A_\mu(x)$ との積になったりして質量項を形成していく。そして対称性の破れが生じうる。他方ヒッグス機構においても，スカラー場 $\Phi(x)$ とゲージ場 $A_\mu(x)$ との相互作用項 $\mathcal{L}_{\Phi A} \propto \Phi(x)^2 A_\mu(x) A^\mu(x)$ の一部が，$\Phi(x)$ が真空期待値 v とそのまわりにゆらぐ場との組み合わせとして書かれることにより，$v^2 A_\mu(x) A^\mu(x)$ すなわち $A_\mu(x)$ の質量項となる。これがまず類似点の第一である。すなわち細谷機構では $A_y(x)$ と $A_\mu(x)$ との相互作用項が，ヒッグス機構ではスカラー場 $\Phi(x)$ と $A_\mu(x)$ との相互作用項が，$A_y(x)$ ないし $\Phi(x)$ が真空期待値をとることにより $A_\mu(x)$ の質量項を生み出して，それによって対称性の破れが説明される。このことは，付録 A に記載した内容からも示唆される。

そしてさらに，細谷機構では A_y の定数値は有効ポテンシャルに対する A_y からの寄与 $V_{\mathrm{eff}}(\theta_j)$ を最小にするものとして決まると仮定する。私たちが観測する現在の宇宙では，ゲージ場の高次元方向成分からの影響は，エネルギーの観点から言っても最小化されているという仮定である。それは自然な仮定であると思われる。そしてそれはちょうどヒッグス機構において，宇宙の拡大に伴うエネルギー密度の減少によりヒッグス場のポテンシャルが最小値をとり相転移が起こって，現在の私たちの日常的な状況において体験されている $U(1)$ ゲージ理論の物理が現出している，と説明されるのに似ている。つまりこの点でも細谷機構とヒッグス機構との類似点が認められる。細谷機構から導かれる有効理論は,「余剰次元半径」R が有限であることにより生じる低次元有効理論であるが，それとともに，有効ポテンシャル $V_{\mathrm{eff}}(\theta_j)$ が最小化されることにより生じる低エネルギー有効理論でもある。

細谷機構とヒッグス機構との相違点は，第一に，細谷機構は余剰次元がなければ生じないがヒッグス機構は 4 次元だけでも生じるということ，第二に，細谷機構における A_y の真空期待値は有効ポテンシャルを最小にする値として比較的自然に決まるが，ヒッグス機構では現象

論的観測によって得られたパラメータを用いた恣意的なポテンシャル項を最小にするものとして決まるということである。ただし細谷機構においても境界条件を設定する行列 U や β を自然に決定する機構は見出されていない。そのため「比較的自然に」と書いた。第三に，細谷機構では場 $A_y(x, y)$ はゲージ場の余剰次元方向成分として自然に定義されるが，ヒッグス機構ではヒッグス場 $\Phi(x)$ の由来が不明である。

この第三の点に関しては，細谷機構の側から興味深い解決案が提示されている。それはゲージ場の余剰次元方向成分 A_y がヒッグス場 Φ の働きを担うというゲージ・ヒッグス統合理論である（整理された文献としては例えば [40] を参照）。すなわち Φ の由来は A_y であると説明される。このとき $A_y = \Phi$ の真空期待値を決めるポテンシャルも現在の標準理論のような恣意的なものではなく，比較的自然に定義される有効ポテンシャルとなるから，第二の点に対する解決案ともなっている。ただ，標準理論のように 4 次元での実験・観測結果を精密かつ広範に説明する理論を有効理論として導くような模型の完成にはまだ至っていない。

他方，細谷機構とヒッグス機構を並存させることも可能である。その場合，一般には，ゲージ場の一部が質量を持ったベクトルボソン場になるときのその質量の表式に対し，細谷機構からの寄与とヒッグス機構からの寄与とが並存することになる。実際，標準理論を余剰次元に拡張する最も単純な模型のひとつとして普遍余剰次元模型というものがあり，そこではヒッグスボソンを含めて，標準理論に存在する全ての場（粒子）が，$M^4 \times (S^1/\mathbb{Z}_2)$ 上で定義された場のゼロモードとして出現するようになっている [42]。また細谷機構とヒッグス機構を両方利用しつつ大統一理論を探る研究も精力的な研究が行われている分野のひとつである。その枠組みで例えば，ヒッグス機構に生じる問題を細谷機構が解消する場合もある。例えば $SU(5)$ 理論において，標準理論では $SU(2)_L$ 2 重項であるヒッグス場を $SU(5)$ 5 重項に拡張した場合，それを $SU(3)_C$ 3 重項と $SU(2)_L$ 2 重項に分解したものの質量パラメータの間に $O(10^{13})$GeV もの格差が生じる上，それらの間に微調整が行われなければならないという「二重項三重項分離問題」が生じる。しかし模型を余剰次元模型に拡張して適切にオービフォルド境界条件を設定すると，この問題が解消するということを示した研究がある [5, 6]。なお，模型の作り方によってはもしかしたら細谷機構とヒッグス機構とが拮抗して，何らかの不合理な理論的産物や現象論的に支持されない理論的産物を生じることもあるかもしれない。しかし現在までのところそのような模型例の報告はないようである。

2.2 オービフォルド余剰次元と細谷機構

2.2.1 余剰次元模型におけるオービフォルド

本節では余剰次元が $S^1/\mathbb{Z}_2$ である場合の，細谷機構による対称性の破れについて説明する。5 次元時空において，余剰空間次元（空間の第 4 次元）の座標を y で表すことにする。このとき $y \sim y + 2\pi R$（「y と $y + 2\pi R$ を同一視する」）という条件を課すとその余剰空間は S^1 をなすと言われるが，ここでさらに $y \sim -y$ という条件を課すと，1 次元オービフォルド $S^1/\mathbb{Z}_2$ となる。$y \sim y + 2\pi R$ かつ $y \sim -y$ という条件のもとでは，点 $y = 0$ および $y = \pi R$ が固定点と呼ばれる点になる。固定点とは自分自身と同一視される点である。$y = 0$ および $y = \pi R$ をそれぞれ y_0，y_1 と書くことにすると，

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 0 \sim -0 = 0, \\
y_1 &= \pi R \sim -\pi R \sim -\pi R + 2\pi R = \pi R,
\end{aligned}
\tag{2.88}
$$

であるから，y_0 および y_1 は固定点であることが分かる。固定点は，その近傍での微分が定義できない特異点となる。そのように特異点たる固定点があるとき，その空間はオービフォルドと呼ばれる。他方，その空間上のすべての点の近傍で微分その他の解析学上の計算が定義できる空間は多様体と呼ばれる。M^4 や S^1 は多様体である。ただし，オービフォルドは「多様体を一般化したもののひとつ」と言われることもある。反転操作 $y \to -y$ は位数 2 の巡回群 $\mathbb{Z}_2$ を成す。$S^1/\mathbb{Z}_2$ の中の記号 $\mathbb{Z}_2$ はそれに由来している。オービフォルド余剰次元模型で典型的に用いられるオービフォルドは，$y \to y + 2\pi R$ のような並進操作に伴う同一視条件（$y \sim y + 2\pi R$ など）に加えて，$y \to -y$ のような巡回群 $\mathbb{Z}_N$ を成す操作に伴う同一視条件（$y \sim -y$ など。以下 $\mathbb{Z}_N$ 条件と呼ぶ）を与えることによって得られる。本論文の主題となる $T^2/\mathbb{Z}_N$ もその一種である。なお $S^1/\mathbb{Z}_N$ としては $S^1/\mathbb{Z}_2$ だけが可能である。1 次元上の N 回の操作で元の点に戻ってくるものとしては $N = 2$ の $y \to -y$ しか考えられないからである。より複雑な 1 次元オービフォルドとしては $S^1/(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2')$ といったものもあるが [43, 44]，本稿では割愛する。

余剰次元模型では典型的に余剰空間はオービフォルドとして設定される。その第一の理由は，2 節の冒頭でも述べたように，それが有効理論におけるフェルミオンをカイラルにする最もよいアイデアのひとつだからである。本節では 1 次元オービフォルドを例にとって説明するが，2 次元等でも同じである。さらに最近では，2 次元オービフォルドにおいてそのオービフォルド上に一様磁場を考えると，6 次元時空上で世代をもたないフェルミオンから，有効理論において特定の世代数をもったフェルミオンを作れるという研究報告もある [26, 27, 28]。

一般に余剰次元に対して $y \sim y + 2\pi R$ のような，並進操作に伴う同一視条件を課しただけでは 4 次元有効理論でのフェルミオンはカイラルにならない。この問題はカイラルフェルミオン問題と呼ばれている。本節では 1 次元オービフォルド $S^1/\mathbb{Z}_2$ を例にとって，まずこの問題について説明し，そしてそれが余剰次元をオービフォルド化することによって解消することを説明する。そしてそのとき細谷機構がどのように働き，どのようにして有効理論での対称性を決定するのかを，具体例を示しながら説明する。最後に，本論文の主題的内容である第 3 章で扱う 2 次元オービフォルド $T^2/\mathbb{Z}_N$ について，その基礎的事項を説明する。

2.2.2 カイラルフェルミオン問題

余剰次元をオービフォルドに設定することによって有効理論におけるフェルミオンがカイラルになるのは，$\mathbb{Z}_N$ 条件の存在による。$S^1/\mathbb{Z}_2$ ならば $\mathbb{Z}_2$ 条件 $y \sim -y$ である。この条件がない場合，少なくとも簡潔な 5 次元ラグランジアンからフェルミオンがカイラルであるような 4 次元有効理論を導くことはできない。

例として 5 次元時空上の $U(1)$ ゲージ理論を取り上げ，そのラグランジアン密度が

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\Gamma^M D_M \psi - \frac{1}{4} F_{MN} F^{MN}, \tag{2.89}$$

で書かれるとする。ここで ψ は 5 次元時空上のフェルミオン場 $\psi(x,y) = \psi(x^0, x^1, x^2, x^3, y)$ であり，5 次元の $U(1)$ ゲージ場 $A_M = A_M(x,y)$ $(M = 0,1,2,3,5)$ と $D_M = \partial_M - igA_M$ を通じて相互作用する。Γ^M は 2.1.3 節の冒頭で述べた，5 次元理論用のガンマ行列（ディラック行列）であり，4 次元理論用のガンマ行列との間には $(\Gamma^\mu, \Gamma^5) = (\gamma^\mu, \gamma^5)$ の関係がある。また $D_5 = \partial_5 - igA_5 = \partial_y - igA_y = D_y$ である。

前節ではフェルミオンの「左巻き成分」,「右巻き成分」について注意を払わなかったが，ここではそれが重要になるので，その基本事項を整理しておく。$\psi(x,y)$ について，そのスピノルとしての上側 2 成分を $\xi(x,y)$，下側 2 成分を $\eta(x,y)$ と表し，この 2 つを縦に並べたベクトルの形で表記すると，

$$\psi(x,y) = \begin{pmatrix} \xi(x,y) \\ \eta(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}(x,y), \tag{2.90}$$

と書ける。2 成分スピノルである $\xi(x,y)$ や $\eta(x,y)$ はワイルスピノル（ワイルフェルミオン）とかカイラルスピノル（カイラルフェルミオン）と呼ばれる。他方,「右巻きフェルミオン」（もしくは「フェルミオンの右巻き成分」）$\psi_R(x,y)$ と「左巻きフェルミオン」（もしくは「フェル

ミオンの左巻き成分」）$\psi_L(x,y)$ を，

$$\psi_R(x,y) = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi(x,y) = \begin{pmatrix}\xi(x,y)\\0\end{pmatrix},$$
$$\psi_L(x,y) = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi(x,y) = \begin{pmatrix}0\\\eta(x,y)\end{pmatrix}, \tag{2.91}$$

で定義する。このとき

$$\gamma^5\psi_R(x,y) = \psi_R(x,y),$$
$$\gamma^5\psi_L(x,y) = -\psi_L(x,y), \tag{2.92}$$

であり，$\psi_R(x,y)$ と $\psi_L(x,y)$ はそれぞれ γ^5 に対して固有値 $+1$ と -1 をもつ固有状態である。γ^5 に対する固有値はカイラリティと呼ばれる。したがって $\psi_R(x,y)$ と $\psi_L(x,y)$ はそれぞれカイラリティ$+1$ と -1 をもつ状態である。ラグランジアンにおいて質量項を持たないフェルミオンの場合，カイラリティの固有状態は同時にヘリシティの固有状態でもあることが知られている。ヘリシティの値はフェルミオンの場合 $+\frac{1}{2}$ か $-\frac{1}{2}$ をとるが，それらはスピンの方向と運動量の方向が平行であるか反平行であるかに対応する。平行であれば $+\frac{1}{2}$ であり，その粒子は「右巻き」であると言われる。反平行であれば $-\frac{1}{2}$ であり，その粒子は「左巻き」であると言われる。質量ゼロの場合の $\psi_R(x,y)$ と $\psi_L(x,y)$ はそれぞれ「右巻き」と「左巻き」に対応したヘリシティ固有状態である。他方，フェルミオンが「カイラルである」とは，カイラリティが $+1$ であるか -1 であるかによって，異なるゲージ相互作用をすることを指す。具体的に標準模型では，左巻きクォークや左巻きレプトンのみが荷電カレントに伴う弱い相互作用をする。つまりそれらの左巻きフェルミオンのみが，弱い相互作用のゲージ粒子のうち W ボソンと結合する。「ゲージ相互作用がカイラルである」という言われ方をすることもある。

しかし何故，左巻きフェルミオンすなわちカイラリティーが -1 のフェルミオンだけが W ボソンと結合するのか明らかでない。そこで，そのような非対称性（左巻きか右巻きかによって異なるという意味での非対称性）が生じるのはあくまでも有効理論においてであり，その背後にある根本の理論においてはそのような非対称性は存在しない，という模型が作れないだろうかという動機が生じる。例えば 5 次元時空で式 (2.89) のように書かれるラグランジアンから，何らかの機構によって有効理論では非対称性が現れる，というようにである。しかし普通に $y \sim y + 2\pi R$ という条件を課して次元簡約を行っただけでは，フェルミオンをカイラルにすることはできない。式 (2.89) の中で ψ と A_M の相互作用を表す項を $\mathcal{L}_{\bar{\psi}A\psi}$ と書くことにすると，

$$\mathcal{L}_{\bar{\psi}A\psi} = -ig\Gamma^M\left(\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L\right)A_M\left(\psi_R + \psi_L\right)$$

$$= -ig\Gamma^M \left(\bar{\psi}_R A_M \psi_R + \bar{\psi}_R A_M \psi_L + \bar{\psi}_L A_M \psi_R + \bar{\psi}_L A_M \psi_L\right), \tag{2.93}$$

となり，ψ_R も ψ_L も A_M と相互作用するが，$y \sim y + 2\pi R$ の条件を課して各場をカルツァ・クライン展開し，次元簡約を行っても，各モードの組み合わせごとにこれと同じような形が成立する。すなわち

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_{\bar{\psi}A\psi} &= -ig\Gamma^M \sum_{n,m,l} \left(\bar{\psi}_R^{(n)} + \bar{\psi}_L^{(n)}\right) A_M^{(l)} \left(\psi_R^{(m)} + \psi_L^{(m)}\right) \\
&= -ig\Gamma^M \sum_{n,m,l} \left(\bar{\psi}_R^{(n)} A_M^{(l)} \psi_R^{(m)} + \bar{\psi}_R^{(n)} A_M^{(l)} \psi_L^{(m)} + \bar{\psi}_L^{(n)} A_M^{(l)} \psi_R^{(m)} + \bar{\psi}_L^{(n)} A_M^{(l)} \psi_L^{(m)}\right),
\end{aligned} \tag{2.94}$$

となる。ここで有効理論における $\psi^{(n)}$，$\psi^{(m)}$，$A_M^{(l)}$ たちの相互作用項を $\tilde{\mathcal{L}}_{\bar{\psi}A\psi}$ と書いた。和は $n + m + l = 0$ であるような組についてとる。標準模型のラグランジアンではフェルミオンの質量はゼロであるから，ここでも質量がゼロである $\psi^{(0)}$ に着目することにし，また $A_M^{(l)}$ のうちゲージ場としてはたらくのはやはり質量がゼロの $A_M^{(0)}$ であるから，$n = m = l = 0$ の項に着目して書き直すと，

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\bar{\psi}A\psi} = -ig\Gamma^M \left(\bar{\psi}_R^{(0)} A_M^{(0)} \psi_R^{(0)} + \bar{\psi}_R^{(0)} A_M^{(0)} \psi_L^{(0)} + \bar{\psi}_L^{(0)} A_M^{(0)} \psi_R^{(0)} + \bar{\psi}_L^{(0)} A_M^{(0)} \psi_L^{(0)} + \cdots\right), \tag{2.95}$$

である。$\psi_R^{(n)}$ と $\psi_L^{(m)}$ の双方が互いに同じように $A_M^{(0)}$ と相互作用する，という点では有効理論においても変わりがない。すなわち有効理論におけるフェルミオン $\psi^{(n)}$ はカイラルにならない。この問題は，カイラルフェルミオン（ワイルフェルミオン）ξ と η が，有効理論におけるフェルミオンのカルツァ・クラインモードにおいても高次元時空のときと同じく両方同じように現れることが原因である，とも言える。そのため「カイラルフェルミオン問題」と呼ばれる。

4 次元でゲージ相互作用がカイラルになるためには，高次元場 ψ を 4 次元場でカルツァ・クライン展開したとき，何らかの理由で 4 次元場でゼロ質量となるゼロモードが ψ_R もしくは ψ_L のどちらかにだけ出現するようになっていればよい，と考えられる。いくつかの方法が知られている。例えば，余剰次元が 2 次元 S^2 で S^2 上に $U(1)$ の磁気単極子的な磁場がある場合，あるいは，余剰次元が 2 次元 T^2 で T^2 上に $SU(N)$ インスタントンがある場合，これらの場合には右巻きか左巻きのフェルミオンにのみゼロモードが出現する。あるいはまた，余剰次元空間そのものが，カラビ・ヤウ空間のように特殊なトポロジーを持っていて 4 次元場がカイラルになることもある。もう一つの可能性は，余剰次元空間がオービフォルドである場合であり，比較的簡潔な設定でフェルミオンをカイラルにするものとして，広く用いられている。以下ではそれについて説明する。

2.2.3 $M^4 \times (S^1/\mathbb{Z}_2)$ 上の境界条件

5 次元時空として $M^4 \times (S^1/\mathbb{Z}_2)$ を考える。これは通常の 4 次元ミンコフスキー時空 M^4 に余剰次元として空間 1 次元を加え，その余剰空間の座標を y としたときに $y \sim y + 2\pi R$ かつ $y \sim -y$ という条件を課すことによって得られる。M^4 の座標を x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ とすると，$(x^\mu, y) \sim (x^\mu, y + 2\pi R) \sim (x^\mu, -y)$ の同一視関係がある。点 $y = 0$ と $y = \pi R$ は反転操作 $y \to -y$ に対して固定点となる。次の 3 つの操作を定義する。

$$
\begin{aligned}
&\hat{P}_0 :\ (x^\mu, y) \to (x^\mu, -y), \\
&\hat{P}_1 :\ (x^\mu, \pi R + y) \to (x^\mu, \pi R - y), \\
&\hat{U} :\ (x^\mu, y) \to (x^\mu, y + 2\pi R).
\end{aligned} \tag{2.96}
$$

$\hat{P}_0$ と $\hat{P}_1$ はそれぞれ $y = 0$ と $y = \pi R$ を軸とする反転であり，$\hat{U}$ は S^1 を一周する並進である。この 3 つの操作は独立ではなく，

$$
(\hat{P}_0)^2 = (\hat{P}_1)^2 = 1, \quad \hat{P}_1 \hat{P}_0 = \hat{U}, \tag{2.97}
$$

の関係がある。反転操作として $\hat{P}_0$ のほかに $\hat{P}_1$ もおく理由は，第一に，$y \sim y + 2\pi R$ のもとで，ある点 $y_c = y$ が反転により $y'_c = -y$ に移される操作としては，$y = 0$ を軸とする反転と $y = \pi R$ を軸とする反転の 2 種類を考えることができること，第二に，その 2 種類の反転それぞれに対して場 $\phi(x, y)$ に定義されるパリティが一般には異なりうることである。第一の点は半径 R の円周を描き，その上に座標 y を刻んで，これらの点をプロットして見比べてみるとすぐに分かる。あるいは簡単な確認計算ですぐに分かる。第二の点については境界条件についての以下の説明とあわせて説明する。なお，$\hat{P}_1 \hat{P}_0 = \hat{U}$ であることは，半径 R の円周上で考えると分かりにくいかもしれない（操作 $\hat{P}_0$ に続けて $\hat{P}_1$ を行うことは，円周方向に $2\pi R$ の並進を行うというより，単に元の点に戻すだけのように見える）が，$-\infty < y < \infty$ の数直線上で考えると分かりやすい。

境界条件は次のようになる。前節と同様，$y \sim y + 2\pi R$ かつ $y \sim -y$ の下でラグランジアン密度が一価であること，すなわち $\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{L}(x, y + 2\pi R) = \mathcal{L}(x, -y)$ を要請する。これは上記の 3 つの操作のもとでラグランジアン密度が一価であるという要請である。簡単のためスカラー場 $\Phi(x, y)$ を例にとると，この要請を満たすために $\Phi(x, y)$ が満たすべき条件すなわち境界条件は，

$$
\Phi(x, y + 2\pi R) = U \Phi(x, y),
$$

$$\Phi(x,-y) = P_0\Phi(x,y), \tag{2.98}$$

と書くことができる。$U(1)$ ゲージ理論の場合，U と P_0 はそれぞれ独立に $+1$ または -1 をとる実数として与えられる。U は $y \sim -y$ という条件がなければより一般的に絶対値が 1 の複素数となるが，式 (2.97) の制限により ± 1 に制限される。P_0 は式 (2.97) より $(\hat{P}_0)^2 = 1$ であるから $P_0 = \pm 1$ であり，また $\hat{P}_1$ に対して定義される P_1 も同様の理由から $P_1 = \pm 1$ である。したがって $\hat{P}_1\hat{P}_0 = \hat{U}$ より $U = \pm 1$ である。他方，$\hat{P}_1\hat{P}_0 = \hat{U}$ であることから得られる別の帰結として，境界条件 (2.98) は,

$$\begin{aligned}\Phi(x,-y) =& P_0\Phi(x,y),\\ \Phi(x,\pi R-y) =& P_1\Phi(x,\pi R+y),\end{aligned} \tag{2.99}$$

と書くこともできる。境界条件 (2.98) と (2.99) は等価である。もちろん，P_0 の式と P_1 の式と U の式を 3 つ並べてもよい。ただしその場合，そのうちひとつは冗長な式ということになる。ここで，たとえば $U = -1$，$P_0 = -1$ であったとする。すると $P_1 = UP_0 = 1$ であるから，境界条件 (2.99) は,

$$\begin{aligned}\Phi(x,-y) =& -\Phi(x,y),\\ \Phi(x,\pi R-y) =& +\Phi(x,\pi R+y),\end{aligned} \tag{2.100}$$

となる。これは $\Phi(x,y)$ の $y \to -y$ に対するパリティが，$y = 0$ を軸とする反転である場合と $y = \pi R$ を軸とする反転である場合とでは異なることを意味する，と解釈できる。P_0 を「$\hat{P}_0$ パリティ」，P_1 を「$\hat{P}_1$ パリティ」と呼ぶことにすると,「$\Phi(x,y)$ の $\hat{P}_0$ パリティは -1，$\hat{P}_1$ パリティは $+1$ である」と言うことができる。

もちろん，$\hat{P}_1\hat{P}_0 = \hat{U}$ であって $\hat{P}_1$ は $\hat{P}_0$，$\hat{U}$ と独立ではないから，$\hat{P}_1$ を考えずに $\hat{P}_0$ と $\hat{U}$ だけで済ますこともできる。そして $U = 1$ であるとき「$\Phi(x,y)$ は $y \to 2\pi R$ に対して周期的である」とか「$y \to 2\pi R$ に対する周期性が+1 である」などと表現し，$U = -1$ であるとき「反周期的である」とか「周期性が -1 である」などと表現することにすると，$\Phi(x,y)$ の特徴づけとして,「$\Phi(x,y)$ は（$\hat{P}_0$）パリティが -1，$y \to 2\pi R$ に対する周期性が -1 の場である」と言うこともできる。しかし素粒子論において「場の周期性」という概念はあまり馴染みがない一方,「場のパリティ」という概念は歴史的経緯もあって比較的馴染みのある概念である。そこで $\Phi(x,y)$ の特徴づけを,「固定点 $y = 0$ のまわりの反転に対するパリティが -1，固定点 $y = \pi R$ のまわりの反転に対するパリティが $+1$ の場である」と表現するのは，比較的馴染みのある表

現であると思われる。実際それはしばしば使われる表現であり，したがってここでも $\hat{P}_0$ と $\hat{U}$ だけでなく，$\hat{P}_1$ という操作も明記した。[3]

2.2.4 $M^4 \times (S^1/\mathbb{Z}_2)$ 上のフェルミオン

$M^4 \times (S^1/\mathbb{Z}_2)$ 上のフェルミオン $\psi(x,y)$ に対する境界条件は，この P_0，P_1 を用いて，

$$\begin{aligned}\psi(x,-y) =& P_0\Gamma^5\psi(x,y),\\ \psi(x,\pi R-y) =& P_1\Gamma^5\psi(x,\pi R+y),\end{aligned} \tag{2.101}$$

と書くことができる。P_0 と P_1 は互いに独立に ± 1 のどちらかの値をとり，上記の $\phi(x,y)$ の例のときと同様，それぞれ固定点 $y=0$ および $y=\pi R$ を軸とした反転に対するパリティと解釈される。Γ^5 の因子が必要なのは，反転操作 $y \to -y$ で $\partial_y \to -\partial_y$ となるからである。相互作用のない自由なディラック場の運動項 $\bar{\psi}(x,y)\Gamma^M\partial_M\psi(x,y)$ を考え，$\{\Gamma^5,\Gamma^\mu\}=0$，$\Gamma^5\Gamma^\mu\Gamma^5=-\Gamma^\mu$，$(\Gamma^5)^2=I$ を用いると，例えば P_0 の方の場合，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(-y)\Gamma^M\partial_M\psi(-y) =& \left\{-\bar{\psi}(y)\Gamma^5P_0\right\}\Gamma^\mu\partial_\mu\left\{P_0\Gamma^5\psi(y)\right\}\\ &+\left\{-\bar{\psi}(y)\Gamma^5P_0\right\}\Gamma^5(-\partial_y)\left\{P_0\Gamma^5\psi(y)\right\}\\ =&\bar{\psi}(y)\Gamma^\mu\partial_\mu\psi(y)+\bar{\psi}(y)\Gamma^5\partial_y\psi(y)\\ =&\bar{\psi}(y)\Gamma^M\partial_M\psi(y),\end{aligned} \tag{2.102}$$

となり，$\mathcal{L}(x,-y)=\mathcal{L}(x,y)$ が満たされることが分かる。ここで $\psi(x,y)$ を $\psi(y)$ と略記した。ただしその一方で，$\bar{\psi}(-y)\psi(-y)=-\bar{\psi}(y)\psi(y)$ 等となり，$\bar{\psi}\psi$ は不変ではなくなるので，通常の質量項 $m\bar{\psi}\psi$ は $M^4\times(S^1/\mathbb{Z}_2)$ 上の 5 次元模型では禁止される。したがって，$M^4\times S^1$ 上の理論であれば式 (2.62) のように $\psi(x,y)$ の質量をおくことができたが，$M^4\times(S^1/\mathbb{Z}_2)$ 上の理論ではそれはできない。

有効理論のフェルミオンをカイラルにする働きをするのは，式 (2.101) の中の Γ^5 である。この Γ^5 が，フェルミオンの右巻き成分 $\psi_R(x,y)$ と左巻き成分 $\psi_L(x,y)$ の間にカルツァ・クライン展開の違いを生じさせ，その結果として有効理論のフェルミオンをカイラルにすることがで

[3] なお式 (2.100) に従うと，たとえば $y=\frac{2}{3}\pi$ のとき，$\Phi(x,\frac{2}{3}\pi)=-\Phi(x,-\frac{2}{3}\pi)=\Phi(x,\frac{4}{3}\pi)$ となる。点 $(x,-\frac{2}{3}\pi)$ と $(x,\frac{4}{3}\pi)$ は互いに同一視される点だが，場 $\Phi(x,-\frac{2}{3}\pi)$ と $\Phi(x,\frac{4}{3}\pi)$ は異なるということになる。日常生活の感覚で見ると少し不思議な感じがするが，条件 $\mathcal{L}(x,y)=\mathcal{L}(x,y+2\pi R)=\mathcal{L}(x,-y)$ さえ満たされていればよい，という物理的条件から導かれた物理的帰結である。場が少なくともラグランジアン（ハミルトニアン）に比べれば直接観測にかからない量であるということとも関連しているであろう。

きる。具体的には，式 (2.92) に示したように $\gamma^5\psi_R(x,y)=\psi_R(x,y)$，$\gamma^5\psi_L(x,y)=-\psi_L(x,y)$ であり，また 2.2.2 節で述べたように $\Gamma^5=\gamma^5$ であるから，

$$\begin{aligned}
\psi_R(x,-y)&=+P_0\psi_R(x,y), \quad \psi_R(x,\pi R-y)=+P_0\psi_R(x,\pi R+y),\\
\psi_L(x,-y)&=-P_1\psi_L(x,y), \quad \psi_L(x,\pi R-y)=-P_1\psi_L(x,\pi R+y),
\end{aligned} \tag{2.103}$$

となる。したがって例えば $P_0=P_1=-1$ の場合，

$$\begin{aligned}
\psi_R(x,-y)&=-\psi_R(x,y), \quad \psi_R(x,\pi R-y)=-\psi_R(x,\pi R+y),\\
\psi_L(x,-y)&=+\psi_L(x,y), \quad \psi_L(x,\pi R-y)=+\psi_L(x,\pi R+y),
\end{aligned} \tag{2.104}$$

となる。$P_0=P_1=1$ であることを $(P_0,P_1)=(+,+)$，$(P_0,P_1)=(1,-1)$ であることを $(P_0,P_1)=(+,-)$ などと表すことにすると，一般に場 $\phi(x,y)$ が式 (2.99) のような境界条件を満たすとき，

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad (P_0,P_1)=(+,+)\\
&\qquad \phi(x,y)=\phi^{(0)}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{(n)}(x)\cos\frac{n}{R}y,\\
&\text{(ii)} \quad (P_0,P_1)=(-,-)\\
&\qquad \phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{(n)}(x)\sin\frac{n}{R}y,\\
&\text{(iii)} \quad (P_0,P_1)=(+,-)\\
&\qquad \phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{(n+\frac{1}{2})}(x)\cos\frac{n+\frac{1}{2}}{R}y,\\
&\text{(iv)} \quad (P_0,P_1)=(-,+)\\
&\qquad \phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{(n+\frac{1}{2})}(x)\sin\frac{n+\frac{1}{2}}{R}y,
\end{aligned} \tag{2.105}$$

のようにカルツァ・クライン展開される。したがって $\psi_R(x,y)$ と $\psi_L(x,y)$ が境界条件 (2.104) を満たす場合，

$$\begin{aligned}
\psi_R(x,y)&=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_R^{(n)}(x)\sin\frac{n}{R}y,\\
\psi_L(x,y)&=\psi_L^{(0)}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{(n)}(x)\cos\frac{n}{R}y,
\end{aligned} \tag{2.106}$$

と展開される。$(P_0, P_1) = (1,1)$ の場合は右巻き (R) と左巻き (L) が入れ替わる。式 (2.106) を見ると，$\psi_L(x,y)$ にだけゼロモード $\psi_L^{(0)}(x)$ が現れている。したがってカイラルフェルミオン問題が解消されている。このとき式 (2.94) は

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_{\bar{\psi}A\psi} =& -ig\Gamma^M \left\{ \bar{\psi}_L^{(0)} A_M^{(0)} \psi_L^{(0)} \right. \\ &\left. + \sum_{\substack{n+m+l=0 \\ n,m\neq 0}} \left(\bar{\psi}_R^{(n)} A_M^{(l)} \psi_R^{(m)} + \bar{\psi}_R^{(n)} A_M^{(l)} \psi_L^{(m)} + \bar{\psi}_L^{(n)} A_M^{(l)} \psi_R^{(m)} + \bar{\psi}_L^{(n)} A_M^{(l)} \psi_L^{(m)} \right) \right\}, \end{aligned} \tag{2.107}$$

となり，ゲージ場 $A_M^{(0)}(x)$ と相互作用する質量ゼロのフェルミオンは左巻きフェルミオン $\bar{\psi}_L^{(0)}(x)$ だけとなる。つまり標準理論においてフェルミオンがカイラルであることを部分的に模する模型となっている。

なお，$(P_0, P_1) = (+,-)$ や $(P_0, P_1) = (-,+)$ のときは $\psi_R(x,y)$ と $\psi_L(x,y)$ のどちらにもゼロモードは現れない。したがって少なくともここで用いたような簡潔な模型の場合，カイラルフェルミオン問題の解消のためには $\psi(x,y)$ の $\hat{P}_0$ パリティと $\hat{P}_1$ パリティは等しくなければならない。

2.2.5 $M^4 \times (S^1/\mathbb{Z}_2)$ 上の $U(1)$ ゲージ場

$M^4 \times (S^1/\mathbb{Z}_2)$ 上のゲージ場も同様に定義できる。$A_\mu(x,y)$ と $A_y(x,y)$ とで境界条件に違いが生じるので，比較しやすくするために両者を縦に並べたベクトル表記を用い，

$$A_M(x,y) = \begin{pmatrix} A_\mu(x,y) \\ A_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\mu \\ A_y \end{pmatrix}(x,y), \tag{2.108}$$

と書くことにする。ラグランジアン密度における $U(1)$ ゲージ場の運動項は $-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}$，フェルミオンとの相互作用項は $\bar{\psi}\Gamma^M D_M \psi$ の中の $-ig\bar{\psi}\Gamma^M A_M \psi$ である。このとき $\mathcal{L}(x,y) = \mathcal{L}(x, y + 2\pi R) = \mathcal{L}(x,-y)$ を満たすべくこのゲージ場に課せられる境界条件は,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_\mu \\ A_y \end{pmatrix}(x,-y) =& P_0 \begin{pmatrix} A_\mu \\ -A_y \end{pmatrix}(x,y), \\ \begin{pmatrix} A_\mu \\ A_y \end{pmatrix}(x,\pi R - y) =& P_1 \begin{pmatrix} A_\mu \\ -A_y \end{pmatrix}(x,\pi R + y), \end{aligned} \tag{2.109}$$

と書ける。ここで P_0，P_1 はゲージ場のパリティであり，式 (2.101) におけるフェルミオンのパリティ P_0，P_1 とは必ずしも同じではない。式 (2.109) を見ると，$A_\mu(x,y)$ と $A_y(x,y)$ とで符号が逆になっている。$\psi(x,y)$ では $\psi_R(x,y)$ と $\psi_L(x,y)$ とでパリティが逆になっていたが，$A_M(x,y)$ では $A_\mu(x,y)$ と $A_y(x,y)$ とでパリティが逆になる。式 (2.109) で $A_y(x,y)$ のほうにマイナスがつく

のは，やはり反転操作 $y \to -y$ で $\partial_y \to -\partial_y$ となるためである。また，それに伴い $D_y \to -D_y$ とするためである。$\partial_y \to -\partial_y$ は $-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}$ で，$D_y \to -D_y$ は $\bar{\psi}\Gamma^M D_M\psi$ で効いてくる。

まず $-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}$ についてみると，$\partial_y \to -\partial_y$ が効いてくるのは $F_{\mu y} = -F_{y\mu}$ においてであるが，上記の境界条件で計算してみると，例えば P_0 のほうでは，

$$
\begin{aligned}
F_{\mu y}(-y) &= \partial_\mu\{-P_0 A_y(y)\} - (-\partial_y)P_0 A_\mu(y) \\
&= -P_0\{\partial_\mu A_y(y) - \partial_y A_\mu(y)\} \\
&= -P_0 F_{\mu y}(y),
\end{aligned} \tag{2.110}
$$

となる。$A_M(x,y)$ を $A_M(y)$ と略記した。確認のため $F_{yy} = 0$ についても計算してみると、

$$
\begin{aligned}
F_{yy}(-y) &= (-\partial_y)\{-P_0 A_y(y)\} - (-\partial_y)\{-P_0 A_y(y)\} \\
&= P_0\{\partial_\mu A_y(y) - \partial_y A_y(y)\} \\
&= P_0 F_{yy}(y),
\end{aligned} \tag{2.111}
$$

である。$P_0 = 1$ の場合は $F_{\mu y}(-y) = -F_{\mu y}(y)$ となるが、$F_{\mu y}(-y)F^{\mu y}(-y) = F_{\mu y}(y)F^{\mu y}(y)$ なので，$\mathcal{L}(x,-y) = \mathcal{L}(x,y)$ という要請は満たされている。

次に $\bar{\psi}\Gamma^M D_M\psi$ について見ると，$A_M(x,y)$ の境界条件が式 (2.109) のようになっていれば，そして $(P_0,P_1) = (1,1)$ ならば，$y \to -y$ で $D_\mu \to D_\mu$，$D_y = \partial_y - igA_y \to -\partial_y + igA_y = -D_y$ となり，$\bar{\psi}\Gamma^M D_M\psi$ の変換は式 (2.102) で ∂_M を D_M で置き換えただけのものになるから，$\psi(x,y)$ に対して式 (2.101) のように設定した境界条件とうまくかみあって，$\bar{\psi}(x,y)\Gamma^M D_M\psi(x,y) = \bar{\psi}(x,-y)\Gamma^M D_M\psi(x,-y)$ となることが分かる。ただ，$(P_0,P_1) = (1,1)$ 以外の場合は，そのようにうまくいかない。したがって実は，$S^1/\mathbb{Z}_2$ 上の $U(1)$ ゲージ理論でフェルミオンとゲージ場との相互作用がある場合，ゲージ場のパリティ (P_0,P_1) は $(1,1)$ しかとれない。フェルミオンとの相互作用がなく，$-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}$ だけが関与する場合ならば，$S^1/\mathbb{Z}_2$ 上の $U(1)$ ゲージ理論でも他の (P_0,P_1) をとれる。

$A_M(x,y)$ の 5 つの成分それぞれもまた，P_0 と P_1 の値によって式 (2.105) のようにカルツァ・クライン展開される。重要な点は，$(P_0,P_1) = (+,+)$ のときは $A_\mu(x,y)$ にだけゼロモードが現れるということ，$(P_0,P_1) = (-,-)$ のときは $A_y(x,y)$ にだけゼロモードが現れるということ，それ以外の場合は $A_\mu(x,y)$ にも $A_y(x,y)$ にもゼロモードが現れないということである。したがってこの $U(1)$ 模型の場合，4 次元有効理論においてゲージ場が生き残るためには $(P_0,P_1) = (+,+)$ でなければならない。

なお，式 (2.107) では式 (2.94) との比較のためゲージ場を $A_M^{(0)}$ の表記のまま用いたが，上述のように $S^1/\mathbb{Z}_2$ 上でフェルミオンと $U(1)$ ゲージ場が相互作用する理論においては，$A_M(x,y)$ に対する (P_0,P_1) は $(P_0,P_1)=(+,+)$ でなければならず，式 (2.107) の $A_M^{(0)}$ は $A_\mu^{(0)}\neq 0$，$A_y^{(0)}=0$ である。したがってゼロモードは $A_\mu(x,y)$ にだけ現れ，$A_y(x,y)$ には現れない。したがって式 (2.107) において $A_y^{(0)}=0$ である。

2.2.6 $M^4\times(S^1/\mathbb{Z}_2)$ 上の $SU(N)$ ゲージ理論と細谷機構

$M^4\times(S^1/\mathbb{Z}_2)$ 上で，$SU(N)$ 基本表現のフェルミオン場 $\psi(x,y)$ と 5 次元の $SU(N)$ ゲージ場 $A_M(x,y)$ $(M=0,1,2,3,5)$ が存在する $SU(N)$ ゲージ理論を考える。ラグランジアンは

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}\Gamma^M D_M\psi-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ F_{MN}F^{MN}, \tag{2.112}$$

で与えられるものとする。2.2.4 節で述べたように $\psi(x,y)$ の質量項をおくことはできない。境界条件は要請 $\mathcal{L}(x,y)=\mathcal{L}(x,y+2\pi R)=\mathcal{L}(x,-y)$ を満たすべく各場に課される条件として与えられる。固定点の座標 $y_0=0$ および $y_1=\pi R$ を y_f $(f=0,1)$ と表すと、

$$\begin{aligned}
\hat{P}_f A_M(x,y_f+y)&=\begin{pmatrix}A_\mu\\A_y\end{pmatrix}(x,y_f-y)=P_f\begin{pmatrix}A_\mu\\-A_y\end{pmatrix}(x,y_f+y)P_f^{-1},\\
\hat{P}_f\psi(x,y_f+y)&=\psi(x,y_f-y)=\eta_f P_f\Gamma^5\psi(x,y_f+y),\\
P_f\in SU(N),&\quad P_f^2=1,\quad \eta_f=\pm1,
\end{aligned} \tag{2.113}$$

と書くことができる。操作 $\hat{P}_f$ $(f=0,1)$ は式 (2.96) で定義される $\hat{P}_0$ もしくは $\hat{P}_1$ であり，P_f はそれらの操作のもとでの各場のふるまいを指定するひねり行列 P_0 もしくは P_1 である。P_f が行列であること，A_M に対しては右からその逆行列もかかること，また ψ のほうに係数 η_f がかかること，を除いては，これまで書いてきた境界条件と同じである。η_f がかかるのは A，$_M(x,y)$ の $\hat{P}_f$ パリティと $\psi(x,y)$ の $\hat{P}_f$ パリティが必ずしも同じではないことを考慮してのことである。両者が同じなら $\eta_f=+1$，逆なら $\eta_f=-1$ となる。$U(1)$ ゲージ理論では $P_f=\pm1$ であったが，非可換ゲージ理論では P_f は行列として表され，一般には非対角要素を持つ。例えば $SU(2)$ ゲージ理論の場合，

$$P_f=\begin{pmatrix}\cos\alpha & e^{-i\beta}\sin\alpha\\ e^{i\beta}\sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}, \tag{2.114}$$

などが可能である。$\hat{U}$ に着目した境界条件も書くならば，$\hat{P}_1\hat{P}_0=\hat{U}$ および $P_1P_0=U$ を用い，式 (2.113) の要素を用いて書くと，

$$\hat{U}A_M(x,y_f+y)=\begin{pmatrix}A_\mu\\A_y\end{pmatrix}(x,y+2\pi R)=U\begin{pmatrix}A_\mu\\A_y\end{pmatrix}(x,y)U^{-1},$$

$$\hat{U}\psi(x,y) = \psi(x, y+2\pi R) = \eta_0\eta_1 U\psi(x,y),$$

$$U = P_1 P_0, \tag{2.115}$$

となる。$\hat{U}$ では $\partial_y \to -\partial_y$ という反転がないので，A_y の符号が変わったり ψ に Γ^5 がつくことはない。2.2.3 節で述べたように，P_0，P_1，U を用いた条件式のうち 2 つが指定されれば境界条件は決まる。

これらの境界条件のもとで，4 次元有効理論での対称性がどうなるかを考える。具体例を 3 つ挙げる。計算の手法としては，対称性を作る生成子 T^a が,

$$\mathcal{H}^{\rm sym} = \{T^a; [U^{\rm sym}, T^a] = [P_0^{\rm sym}, T^a] = [P_1^{\rm sym}, T^a] = 0\}, \tag{2.116}$$

に属するものとして決まる，という手法を用いる。ここで $U^{\rm sym}$，$P_0^{\rm sym}$，$P_1^{\rm sym}$ は，有効ポテンシャル $V_{\rm eff}(\theta_j)$ を最小にするような $A_y^{(0)} \equiv \langle A_y^{(0)}\rangle$ が $\langle A_y^{(0)}\rangle \to 0$ とゲージ変換されたときの,（したがって $\hat{W} = U$ となったときの）U，P_0，P_1 である。ウィルソンライン位相 $\{\theta_j\}$ の値は一般に $U^{\rm sym}$，$P_0^{\rm sym}$，$P_1^{\rm sym}$ の中に入ってくる。式 (2.116) は 2.1.4 節の式 (2.72) で紹介したものを $S^1/\mathbb{Z}_2$ にあてはめたものである。2.1.4 節ではひねり行列が U しかなかったので $[U^{\rm sym}, T^a] = 0$ だけ考えればよかったが，ここではその他に P_0，P_1 もあるので，それらとの交換関係も考慮される。ただ，これら 3 つのひねり行列は 3 つとも独立というわけではなく，$P_1P_0 = U$ の関係があるので，式 (2.116) に書いた 3 つの交換関係のうち 2 つを調べれば $\mathcal{H}^{\rm sym}$ は決まる。なお，1 つを調べただけでは決まらない。一般に零でない任意の行列を A，B，T とすると，$[AB, T] = 0$ が成り立っても $[A, T] = [B, T] = 0$ が成り立つとは限らないからである。ウィルソンライン位相は,

$$\begin{aligned}\hat{W}(x) &= P\exp\left\{-ig\int_0^{2\pi R} dy\, A_y(x,y)\right\} U \\ &= P\exp\left\{-ig\int_0^{2\pi R} dy\, A_y^{(0)}(x)\right\} U,\end{aligned} \tag{2.117}$$

の固有値，もしくはそれらを $\{e^{i\theta_j}\}$ という形で書いた時の $\{\theta_j\}$ として与えられる。前節（2.1 節）では説明の便のため式 (2.117) の二行目のような表式は示さなかったが，$A_y(x,y)$ のカルツァ・クライン展開を一行目に代入するとすぐに導かれる。つまり $A_y(x,y)$ が典型的にカルツァ・クライン展開される場合，$\hat{W}(x)$ は式 (2.117) の二行目のようになり，$\hat{W}(x)$ に寄与するのは実質的にはゼロモード $A_y^{(0)}(x)$ のみである。ゼロモードがない場合は $\hat{W} = U$ となる。$SU(N)$ 理論では，前節で示したようにゼロモードを持つかどうかは $A_y(x,y)$ の各成分ごとで

異なるため，$A_y^{(0)}(x)$ はゼロモードを持たない行列成分については 0，それ以外については一般に 0 でない値をとりうる行列として表せる。なお適当なゲージ変換によってゼロモードをもつ成分の値も 0 に変換しうるが，ゼロモードを持たない成分では恒常的に 0 である一方，ゼロモードを持つ成分ではゲージ変換によって 0 になったり 0 にならなかったりするというのが違いである。

まず 1 つ目の計算例として，$SU(3)$ ゲージ理論で境界条件が $P_0 = P_1 = I$ で与えられた場合を考える。T^a は式 (2.44) で与えられるものを用いる。$\hat{P}_0$ と $\hat{P}_1$ それぞれに対して $A_M(x,y)$ の各成分がもつパリティを $(+,+)$，$(+,-)$ などと書き，それを行列の形に並べて書いたものを本稿では「パリティ行列」と呼ぶことにする。たとえば $A_M(x,y)$ の $(1,2)$ 成分 $A_{M,12}(x,y)$ が $\hat{P}_0$ に対して $+1$，$\hat{P}_1$ に対して -1 のパリティをもつならば，その行列の $(1,2)$ 成分に $(+,-)$ と書くことにする。すると $P_0 = P_1 = I$ の場合，A_μ および A_y に対するパリティ行列は,

$$A_\mu : \begin{pmatrix} (+,+) & (+,+) & (+,+) \\ (+,+) & (+,+) & (+,+) \\ (+,+) & (+,+) & (+,+) \end{pmatrix}, \quad A_y : \begin{pmatrix} (-,-) & (-,-) & (-,-) \\ (-,-) & (-,-) & (-,-) \\ (-,-) & (-,-) & (-,-) \end{pmatrix}, \tag{2.118}$$

となる。$\hat{P}_0$ と $\hat{P}_1$ に対するパリティが ± 1 の場合，$(A_M)_{jk}$ のカルツァ・クライン展開は式 (2.105) のようになるので，$A_\mu(x,y)$ では全ての成分 $A_{\mu,jk}(x)$ にゼロモード $A_{\mu,jk}^{(0)}(x)$ が現れる。他方 $A_y(x,y)$ のほうでは全ての成分について $A_{y,jk}^{(0)}(x) = 0$ となり，したがって $A_y^{(0)}(x,y) = 0$ である。すると式 (2.117) より $\hat{W} = U = P_1 P_0 = I$ となる。ウィルソンライン位相は $\{\theta_j\} = \{0,0,0\}$ $\pmod{2\pi}$ となり，それ以外の値は取り得ない。この場合 $P_0 = P_1 = U = I$ がそのまま $P_0^{\mathrm{sym}} = P_1^{\mathrm{sym}} = U^{\mathrm{sym}} = I$ となり，$SU(3)$ の 8 つの生成子 T^a $(a = 1, \ldots, 8)$ すべてがそれらと交換する。つまり対称性の破れは起こらない。

次に，P_0 および P_1 が

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.119}$$

で与えられた場合を考える。このとき $A_\mu(x,y)$ と $A_y(x,y)$ のパリティ行列は,

$$A_\mu : \begin{pmatrix} (+,+) & (+,-) & (-,+) \\ (+,-) & (+,+) & (-,-) \\ (-,+) & (-,-) & (+,+) \end{pmatrix}, \quad A_y : \begin{pmatrix} (-,-) & (-,+) & (+,-) \\ (-,+) & (-,-) & (+,+) \\ (+,-) & (+,+) & (-,-) \end{pmatrix}, \tag{2.120}$$

となる。$A_\mu(x,y)$ のゼロモードは対角（T^3，T^8）成分に，$A_y(x,y)$ のゼロモードは T^6，T^7 の 2 成分に現れる。そこで $A_y^{(0)}(x)$ を,

$$A_y^{(0)}(x) = \frac{1}{2\pi g R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v(x) \\ 0 & v(x) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.121}$$

ととる。すると $\hat{W}$ は,

$$\begin{aligned}
\hat{W}(x) &= P\mathrm{exp}\left\{-ig\int_0^{2\pi R} dy\, A_y^{(0)}(x,y)\right\}U \\
&= \exp\left\{-i\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & v(x)\\ 0 & v(x) & 0\end{pmatrix}\right\}P_1P_0 \\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos v(x) & -i\sin v(x)\\ 0 & -i\sin v(x) & \cos v(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\cos v(x) & i\sin v(x)\\ 0 & i\sin v(x) & -\cos v(x)\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.122}$$

となる。この $\hat{W}$ の固有値を求めてみると，$\{1, -e^{iv(x)}, -e^{-iv(x)}\}$ となる。したがってウィルソンライン位相は $\{\theta_j(x)\} = \{0, \pi + v(x), \pi - v(x)\}$ である（$\hat{W}$ の固有値そのものでなく，それを $\{e^{i\theta_j}\}$ という形で書いた時の $\{\theta_j\}$ をウィルソンライン位相と呼ぶ場合）。

有効ポテンシャル $V_{\mathrm{eff}}(\theta_j)$ の計算は複雑であるので割愛する。ここでは仮にそれが

$$\langle A_y^{(0)}\rangle = \frac{1}{2\pi gR}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & v\\ 0 & v & 0\end{pmatrix}, \tag{2.123}$$

に対応する $\{\theta_j\}$ において最小値をとったとする。$A_y^{(0)}(x)$ の真空期待値という意味で $\langle A_y^{(0)}\rangle$ と書いた。v は実数である。したがって $\langle A_y^{(0)}\rangle = v/(2\pi gR)T^6$ と書ける。$\langle A_y\rangle$ が与えられた時，それをゼロにするゲージ変換は一般に

$$\Omega(x,y) = e^{-ig\langle A_y\rangle\, y}, \tag{2.124}$$

で与えられる。そこで，式 (2.124) の $\langle A_y\rangle$ に式 (2.123) の $\langle A_y^{(0)}\rangle$ を代入したものを使って P_0，P_1，U をゲージ変換すると，P_0^{sym}，P_1^{sym}，U^{sym} が得られる。ここでは P_0^{sym} と U^{sym} を計算することにすると，式 (2.51) を用いて，

$$\begin{aligned}
P_0^{\mathrm{sym}} &= e^{-ig\langle A_y^{(0)}\rangle(-y)}P_0e^{ig\langle A_y^{(0)}\rangle y} \\
&= P_0,
\end{aligned} \tag{2.125}$$

$$\begin{aligned}
U^{\mathrm{sym}} &= e^{-ig\langle A_y^{(0)}\rangle(y+2\pi R)}Ue^{ig\langle A_y^{(0)}\rangle y} \\
&= e^{-ig\langle A_y^{(0)}\rangle 2\pi R}U
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -i\sin v \\ 0 & -i\sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos v & i\sin v \\ 0 & i\sin v & -\cos v \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.126}
$$

となる。計算においては，一般に行列 A と B が $BA = \tau AB$ を満たすとき，$Be^{\alpha A} = e^{\alpha\tau A}B$ となることを用いると便利である。τ と α は適当な複素数である。上の計算では $P_0T_6 = -T_6P_0$ と $UT_6 = T_6U$ が利用できる。

$SU(3)$ の 8 つの T^a として式 (2.44) に示されるもののうち，$[U^{\text{sym}}, T^a] = [P_0^{\text{sym}}, T^a] = 0$ を満たすものをピックアップする。まず $[P_0^{\text{sym}}, T^a]$ を調べてみると，T^1，T^2，T^3，T^8 の 4 つが $[P_0^{\text{sym}}, T^a] = 0$ を満たすことが分かる。他方 $[U^{\text{sym}}, T^a]$ を調べてみると，一般の v に対して $[U^{\text{sym}}, T^a] = 0$ を満たすのは T^6 のみである。したがって式 (2.44) に示される T^a のままでは，一般の v に対して $[U^{\text{sym}}, T^a] = [P_0^{\text{sym}}, T^a] = 0$ を満たすものは存在しない。

しかし $[P_0^{\text{sym}}, T^a] = 0$ を満たすものは 4 つあるので，この 4 つの適当な線型結合，たとえば a と b を適当なパラメータとして $aT^1 + bT^2$ などとしたものの中に U と交換するものがないかを探してみる。$[P_0^{\text{sym}}, T^1] = [P_0^{\text{sym}}, T^2] = 0$ なので $[P_0^{\text{sym}}, aT^1 + bT^2] = 0$ であり，したがってこれが $[U^{\text{sym}}, aT^1 + bT^2] = 0$ をも満たすならば，$aT^1 + bT^2$ は新しい対称性を作る生成子となり得る。そこで例えば,

$$
U(aT^1 + bT^2) - (aT^1 + bT^2)U = 0, \tag{2.127}
$$

の解となる a，b を求める。計算すると，$a \neq 0$，$b \neq 0$ となるのは $\cos v = 1,\ \sin v = 0$ のときのみで，それ以外では $a = b = 0$ となることが分かる。$\cos v = 1,\ \sin v = 0$ すなわち $v = 0 \pmod{2\pi}$ のときには，特に線型結合にしなくても T^1，T^2，T^3，T^6，T^7，T^8 が $[U^{\text{sym}}, T^a] = 0$ を満たす。つまり生成子の組み直しということをしなくても，式 (2.44) の表記のままで，T^1，T^2，T^3，T^8 が $[U^{\text{sym}}, T^a] = [P_0^{\text{sym}}, T^a] = 0$ を満たす。すると $\mathcal{H}^{\text{sym}} = \{T^1, T^2, T^3, T^8\}$ となり，4 次元有効理論での対称性は $SU(2) \times U(1)$ に破れる。

同様に他の組み合わせも計算してみると，他に 2 つのパターンがあることが分かる。1 つは $\cos v = -1,\ \sin v = 0$ すなわち $v = \pi \pmod{2\pi}$ のときで，このとき $U^{\text{sym}} = I$ となるから全ての T^a と交換する。したがって $\mathcal{H}^{\text{sym}} = \{T^1, T^2, T^3, T^8\}$ となり，この場合も 4 次元有効理論での対称性は $SU(2) \times U(1)$ となる。もう 1 つのパターンは一般の v に対して成立するもので，a, b, c, d を適当なパラメータとして $[U^{\text{sym}}, aT^1 + bT^2 + cT^3 + dT^8] = 0$ を満たす解を

求めると，$(a,b,c,d)=(0,0,\sqrt{3}d,d)$ が得られる。つまり $\sqrt{3}dT^3+dT^8$ が一般の v に対して $[U^{\rm sym},\sqrt{3}dT^3+dT^8]=0$ を満たす。$SU(N)$ の生成子 T^a は条件 $\mathrm{Tr}\,T^aT^b=\delta^{ab}$ を満たすものでなければならないから，例えば $\frac{\sqrt{3}}{2}T^3+\frac{1}{2}T^8$ が 4 次元有効理論での対称性を作る生成子となる。他に $[U^{\rm sym},aT^1+bT^2+cT^3+dT^8]=0$ を満たすものはないから，$\mathcal{H}^{\rm sym}=\{\frac{\sqrt{3}}{2}T^3+\frac{1}{2}T^8\}$ となり，対称性は $U(1)$ に破れる。

以上を整理すると，境界条件が式 (2.119) の P_0，P_1 で与えられたとき，4 次元有効理論での対称性は式 (2.123) の $\langle A_y^{(0)}\rangle$ の値によって決まり，$v=0,\pi\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ ならば $SU(2)\times U(1)$ に，$v\neq 0,\pi\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ ならば $U(1)$ に破れる。実際にどの対称性に破れるかは，有効ポテンシャル $V_{\rm eff}(\theta_j)$ を計算しそれを最小にする $\langle A_y^{(0)}\rangle$ を評価することによって判明する。

最後に第三の例として，対角型でないひねり行列を含むもの

$$P_0=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad P_1=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\tag{2.128}$$

を考える。このとき A_y のゼロモードがどの成分に現れるかをまず見なければならないが，今回の場合，単純なパリティ行列を書くことができないので，それを調べるのは少し複雑になる。$A_y(x,y)$ を $A_y(x,y)=\sum_{a=1}^{8}A_y^a(x,y)T^a$ で表し，P_1 のもとで $A_y(x,y)$ が満たすべき式を具体的に書くと，

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}A_y^3+A_y^8&A_y^1-iA_y^2&A_y^4-iA_y^5\\A_y^1+iA_y^2&-A_y^3+A_y^8&A_y^6-iA_y^7\\A_y^4+iA_y^5&A_y^6+iA_y^7&-2A_y^8\end{pmatrix}(x,\pi R-y)\\
&=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\left\{-\begin{pmatrix}A_y^3+A_y^8&A_y^1-iA_y^2&A_y^4-iA_y^5\\A_y^1+iA_y^2&-A_y^3+A_y^8&A_y^6-iA_y^7\\A_y^4+iA_y^5&A_y^6+iA_y^7&-2A_y^8\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}^{-1}(x,\pi R+y)\\
&=\begin{pmatrix}-A_y^3-A_y^8&A_y^5-i(-A_y^4)&-A_y^2-iA_y^1\\A_y^5+i(-A_y^4)&2A_y^8&A_y^6-i(-A_y^7)\\-A_y^2+iA_y^1&A_y^6+i(-A_y^7)&A_y^3-A_y^8\end{pmatrix}(x,\pi R+y),
\end{aligned}\tag{2.129}$$

のようになる。なお T^a における $\frac{1}{2}$ や $\frac{1}{\sqrt{3}}$ などの係数は適当に A_y^a の再定義によって A_y^a の中に含ませた。P_0 に対するパリティは前述の第二の例と同じだから，パリティ行列を書くとしたら $(1,1)$ 成分については $(-,-)$ と書けるが，他の行列成分についてはそのように書けない。しかし T^6 に対応する成分 $A_y^6(x,y)$ を見ると，

$$A_y^6(x,\pi R-y)=A_y^6(x,\pi R+y),\tag{2.130}$$

となっており，P_0 に対する変換の式と合わせると

$$A_y^6(x,-y)=A_y^6(x,y),$$

$$A_y^6(x, \pi R - y) = A_y^6(x, \pi R + y), \tag{2.131}$$

となる。したがって $A_y^6(x,y)$ は式 (2.105) における $(+,+)$ のケースと同様に展開され，ゼロモードを持つことが分かる。他に式 (2.105) と同様に展開できるものとしては $A_y^7(x,y)$ があるが，こちらは $(+,-)$ のケースに該当するためゼロモードを持たない。他の成分については，一般には単純にカルツァ・クライン展開することができない。例えば $A_y^1(x,y)$ について見ると，式 (2.129) より

$$A_y^1(x, \pi R - y) = A_y^5(x, \pi R + y), \tag{2.132}$$

となる。P_0 のほうから得られる式と合わせると，$A_y^1(x,y)$ に対する境界条件は，

$$\begin{aligned} A_y^1(x, -y) &= A_y^1(x, y), \\ A_y^1(x, \pi R - y) &= A_y^5(x, \pi R + y), \end{aligned} \tag{2.133}$$

となる。他方，$A_y^5(x,y)$ についても同様にみると，

$$\begin{aligned} A_y^5(x, -y) &= -A_y^5(x, y), \\ A_y^5(x, \pi R - y) &= A_y^1(x, \pi R + y), \end{aligned} \tag{2.134}$$

である。一般にひねり行列に非対角型のものが含まれると $A_M^a(x,y)$ の境界条件はこのように複数の成分がからみあったものになり，モード展開を求めるのは複雑になる。$N \times N$ の行列成分がすべて零でない場合だと N^2-1 個の A_y^a すべてがからみ合ってくる。しかし今回の場合はうまく展開式を求めることができて，上記の $A_y^1(x,y)$ と $A_y^5(x,y)$ の場合，一般には

$$\begin{aligned} A_y^1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ & A_y^{1(n)-}(x) \cos \frac{n-\frac{1}{4}}{R} y + A_y^{1(n)+}(x) \cos \frac{n+\frac{1}{4}}{R} y \\ & + \tilde{A}_y^{1(n)-}(x) \cos \frac{n-\frac{3}{4}}{R} y + \tilde{A}_y^{1(n)+}(x) \cos \frac{n+\frac{3}{4}}{R} y \Bigg\}, \\ A_y^5(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ & -A_y^{1(n)-}(x) \cos \frac{n-\frac{1}{4}}{R} y + A_y^{1(n)+}(x) \cos \frac{n+\frac{1}{4}}{R} y \\ & + \tilde{A}_y^{1(n)-}(x) \cos \frac{n-\frac{3}{4}}{R} y - \tilde{A}_y^{1(n)+}(x) \cos \frac{n+\frac{3}{4}}{R} y \Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.135}$$

と書くことができる。ここで $A_y^{1(n)-}(x)$，$A_y^{1(n)+}(x)$，$\tilde{A}_y^{1(n)-}(x)$，$\tilde{A}_y^{1(n)+}(x)$ はそれぞれ異なる 4 次元場である。導出は付録 B に示す。いずれの場合でも，コサインやサインの三角関数の部分が y によらない定数になるような n の項，すなわちゼロモードは存在しない。他の $A_y^a(x,y)$

の成分についても同様である。したがってゼロモードをもつのは T^6 に対応する成分 $A_y^6(x,y)$ だけである。するとここでも，式 (2.123) と同様に $A_y^{(0)}(x)$ の真空期待値（有効ポテンシャル $V_{\mathrm{eff}}(\theta_j)$ を最小にする $A_y^{(0)}(x)$ の値）を

$$\langle A_y^{(0)} \rangle = \frac{1}{2\pi gR} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.136}$$

とおき，これをゼロにするようなゲージ変換によって P_0^{sym}，P_1^{sym}，U^{sym} を求めることができる。なお $\langle A_y^{(0)} \rangle$ の中のゼロでない成分について，先述の第二の例では v と書いたが，ここではそれと一応区別して u と書いた。今回も P_0^{sym} と U^{sym} を用いることにすると，まず P_0^{sym} は先述の第二の例とまったく同じ計算になるので $P_0^{\mathrm{sym}} = P_0$ になる。U^{sym} は式 (2.126) での U をここでの U（式 (2.128) の P_0 と P_1 から $P_0 P_1 = U$ で求められる U）で置き換えて，

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{sym}} &= e^{-ig\langle A_y^{(0)} \rangle (y+2\pi R)} U e^{ig\langle A_y^{(0)} \rangle y} \\ &= e^{-ig\langle A_y^{(0)} \rangle 2\pi R} U \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & -i\sin u \\ 0 & -i\sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin u & -i\cos u \\ 0 & -i\cos u & \sin u \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.137}$$

となる。すると，P_0^{sym} は第二の例と同じであり，また U^{sym} も式 (2.126) の U^{sym} と比べると $\cos v \to -\sin u$ と置き換わるだけであるから，結論は第二の例と同様のものになる。つまり 4 次元有効理論における対称性は $\sin u = \pm 1$ すなわち $u = \pm\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ のときは $SU(2) \times U(1)$ に，$u \neq \pm\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ のときは $U(1)$ に破れる。

以上の 3 つの例で示した手順を整理すると，次のようになる。細谷機構によって有効理論の対称性がどのようなものになるかを計算する際には，まず（1）$A_y(x,y)$ のゼロモード $A_y^{(0)}(x,y)$ がどの成分に現れるかを調べる。そして本稿では省略したが（2）その $A_y^{(0)}(x,y)$ に対応したウィルソンライン位相 θ_j を用いて有効ポテンシャル $V_{\mathrm{eff}}(\theta_j)$ を計算し，それを最小にする $A_y^{(0)}(x,y)$，すなわち $A_y^{(0)}(x,y)$ の真空期待値 $\langle A_y^{(0)} \rangle$ を求める。そして最後に，(3) その $\langle A_y^{(0)} \rangle$ を $\langle A_y^{(0)} \rangle \to 0$ と変換するゲージ変換を用いて P_0，P_1，U を変換し，それらを P_0^{sym}，P_1^{sym}，U^{sym} として，高次元理論での対称性を作っていた生成子の集合 $\{T^a\}$ のうち $[P_0^{\mathrm{sym}}, T^a] = [P_1^{\mathrm{sym}}, T^a] = [U^{\mathrm{sym}}, T^a] = 0$ を満たす T^a を探す。それらの T^a の集合 $\{T^a\}$ によって作られる対称性が，有効理論での対称性となる。

2.2.7　2 次元オービフォルド $T^2/\mathbb{Z}_N$ について

最後に，本論文の主題であり第 3 章の主題である 2 次元オービフォルド $T^2/\mathbb{Z}_N$ について，本章での内容の延長上で述べられる基礎的な事柄を簡単に述べる。より一般的な内容は第 3 章の 3.3 節で述べる。

余剰空間次元を 2 次元とする 6 次元時空を考え，その座標を x^M $(M = 0, 1, 2, 3, 5, 6)$ とする。x^5 と x^6 を余剰空間次元の座標とすると，ゲージ場もしくはベクトル場 A_M の余剰次元方向成分は A_5 および A_6 となる。x^5 と x^6 について，

$$
\begin{aligned}
x^5 &\sim x^5 + 2\pi R_1, \\
x^6 &\sim x^6 + 2\pi R_2,
\end{aligned}
\tag{2.138}
$$

を同時に課すと，この 2 次元余剰空間はトーラス T^2 を成すと言われる（なお S^1 のほうは円とか円周と呼ばれる）。R_1 と R_2 は適当なパラメータである。T^2 は例えばドーナツの表面として思い浮かべることができる。そして残りの 4 次元が通常のミンコフスキー時空であるとすれば，この 6 次元時空は $M^4 \times T^2$ であると言われる。S^1 をつくるとき，$y \to y + 2\pi R$ の操作を $\hat{U}$ と書いたが，T^2 をつくる 2 つの条件はそれぞれ，$\hat{T}_1$ および $\hat{T}_2$ などと書かれる。ここの T は Translation（並進）の T である。たとえば

$$
\begin{aligned}
\hat{T}_1 :\ (x^\mu, x^5, x^6) &\to (x^\mu, x^5 + 2\pi R_1, x^6), \\
\hat{T}_2 :\ (x^\mu, x^5, x^6) &\to (x^\mu, x^5, x^6 + 2\pi R_2),
\end{aligned}
\tag{2.139}
$$

とおくことができる。そしてそれらに対応したひねり行列，つまりそれらの操作のもとでの同一視条件を課したときに（高次元）場の境界条件を与えるものとして指定される行列は，T_1，T_2 と書かれたりする。本論文でもその表記を用いる。

ここでさらに，その 2 次元余剰空間上の位置ベクトル $Q = (x^5, x^6)$ を回転させる操作に対しての同一視条件をも課すと，$(x^5, x^6) = (0, 0)$ をはじめとしていくつかの点が固定点となり，この 2 次元余剰空間は 2 次元オービフォルド $T^2/\mathbb{Z}_N$ になる。それを考えるにあたって，x^5 と x^6 を複素数の形に組みなおし，2 次元余剰空間を複素平面で表現すると便利である。つまり，

$$
\begin{aligned}
z &\equiv x^5 + ix^6, \\
\bar{z} &\equiv x^5 - ix^6,
\end{aligned}
\tag{2.140}
$$

とし，時空の座標を $x^M = (x^\mu, z, \bar{z})$ で表す。そしてこれに対応した $A_M(x^\mu, z, \bar{z})$ の余剰次元方

向成分は,

$$A_z \equiv \frac{A^5 + iA^6}{2},$$
$$A_{\bar{z}} \equiv \frac{A^5 - iA^6}{2}, \tag{2.141}$$

とする。この表記を用いると，巡回群 $\mathbb{Z}_N$ を作る操作は複素平面上の回転操作

$$\hat{R}_0 :\ z \to e^{2\pi i/N} z, \tag{2.142}$$

で与えられる。N は $N \geq 2$ の自然数とする。本稿ではしばしばこれを $\mathbb{Z}_N$ 回転とか $\mathbb{Z}_N$ 操作などと呼ぶことにする。$\mathbb{Z}_2$ 回転ならば $\hat{R}_0 : z \to -z$ であり，位置ベクトル $Q = (x^\mu, z, \bar{z})$ を 180 度回転（反転）させる操作である。その操作を 2 回繰り返すと元の点に戻るというものであり，巡回群 $\mathbb{Z}_2$ を成す。$\mathbb{Z}_3$ 回転ならば $\hat{R}_0 : z \to e^{i2\pi/3} z$ であり，位置ベクトル $Q = (x^\mu, z, \bar{z})$ を $\frac{2}{3}\pi$ すなわち 120 度回転させる操作である。その操作を 3 回繰り返すと元の点に戻るというものであり，巡回群 $\mathbb{Z}_3$ を成す。

ただし $T^2/\mathbb{Z}_N$ における N はどんな値でもとれるわけではなく，$N = 2, 3, 4, 6$ に制限される。さらに N=3, 4, 6 については，並進 $\hat{T}_2$ の方向が制限される。次にそれを説明する。

簡単のため，一般性を失わずに並進 $\hat{T}_1$ と $\hat{T}_2$ の距離（今まで $2\pi R_k$ のように書いていたもの）をすべて 1 に規格化する。また並進 $\hat{T}_2$ の方向について，トーラス T^2 を作るという目的のためにはそれは必ずしも並進 $\hat{T}_1$ と直交する方向でなくてもよいことに着目する。複素平面を用いる上の表記で言えば，虚数軸 i の方向の並進すなわち $z \to z + i$ でなくても，$\mathrm{Im}\,\tau \neq 0$ であるような複素数 τ を用いた $z \to z + \tau$ であってもよいということである。ドーナツのイメージで言えば，それはドーナツの「身」の部分を垂直に輪切りにした円形の断面をずらりと並びつなげて作ったものと見ることも出来れば,「身」の部分を斜めに輪切りにして，その楕円形の断面をずらりと並びつなげて作ったものと見ることもできる，ということに相当する。なお $\mathrm{Im}\,\tau \neq 0$ の条件が必要なのはそれがないと $\hat{T}_1$ と平行もしくは反平行になってしまってトーラスを作ることができないからであり，また並進の距離を 1 としたので $|\tau| = 1$ である。このとき $\hat{T}_1$ と $\hat{T}_2$ のもとでの同一視を課すことは,

$$z \sim z + 1, \quad z \sim z + \tau, \tag{2.143}$$

と書ける。

ここにさらに $z \sim e^{2\pi i/N} z$ を課す場合（つまり $z \sim z + 1 \sim z + \tau \sim e^{2\pi i/N} z$ の場合），N は $N = 2, 3, 4, 6$ に制限されること，さらに $N = 2$ の場合を除いて並進 $\hat{T}_2$ の方向すなわち τ に

は一定の制限がかかること，が帰結する。まず，$z \sim e^{2\pi i/N} z$ という条件が課されたとき，点 $z=0$ は自明な固定点となることに着目する。固定点とは，2.2.1 節冒頭で述べたように，自分自身と同一視される点である。すると $z \sim z+1 \sim z+\tau$ より点 $z=1$ と点 $z=\tau$ もまた固定点でなければならない。一般に $z \sim z+1 \sim z+\tau \sim e^{2\pi i/N} z$ のもとでの固定点の座標を z_f と表すと，

$$z_f = \left(e^{2\pi l i/N}\right) z_f + n + m\tau, \qquad (n, m, l \in \mathbb{Z}), \tag{2.144}$$

が成り立つ。なお l は任意の整数であるが，n, m は整数のうち式 (2.144) を満たすものがひとつでもあればよいというものである。つまり任意の整数 l に対し，式 (2.144) を満たす整数 m, n がひとつでも存在すること，が z_f の満たすべき条件である。（ただし $e^{2\pi l i/N}$ が取りうる値の数は実質的に $l = 0, 1, \ldots, N-1$ に対応する N 個のみである）。したがって点 $z=1$ が固定点であるためには，

$$1 = \left(e^{2\pi l i/N}\right) + n + m\tau, \qquad (n, m, l \in \mathbb{Z}), \tag{2.145}$$

が満たされなければならない。つまり任意の整数 l に対し式 (2.145) を満たす整数 m, n が存在しなければならない。$\tau = e^{i\phi}$ とおくと，式 (2.145) からは，

$$\begin{aligned} \cos\frac{2\pi l}{N} &= -n + 1 + m\cos\phi, \\ \sin\frac{2\pi l}{N} &= -m\sin\phi, \qquad (n, m, l \in \mathbb{Z}), \end{aligned} \tag{2.146}$$

が得られる。後の便のため $-m \to m$，$-n+1 \to n-1$ と再定義して書き直すと，

$$\begin{aligned} \cos\frac{2\pi l}{N} &= n - 1 + m\cos\phi, \\ \sin\frac{2\pi l}{N} &= m\sin\phi, \qquad (n, m, l \in \mathbb{Z}), \end{aligned} \tag{2.147}$$

である。これらのうち 2 番目の式に着目する。先述した通りトーラスを作るためには $\mathrm{Im}\tau \neq 0$ でなければならないから $\sin\phi \neq 0$ である。ϕ はそれとともに式 (2.147) を満たすものとして制限を受ける。N は式 (2.142) のところで述べたように $N \geq 2$ の自然数である。ただし $N=2$ のときは特殊で，式 (2.147) は $m\sin\phi = 0$ となり，これを満たすのは $m=0$ のみである。このとき $\sin\phi$ はどんな値をとってもよいから，$N=2$ のとき，すなわち $T^2/\mathbb{Z}_2$ のときは τ に制限はない。他方，$N \geq 3$ のときは制限を受ける。$\sin\phi$ は任意の整数 l に対して式 (2.147) を満たさなければならないから，今 $l=1$ とおくことにする。そのうえで m としてある値を指定すると $\sin\phi$ の候補を（すなわち τ の候補を）ひとつ定めたことになる。そのときの m の値を

m_c とする。$N=2$ 以外では $m=0$ となることはないから，$N \geq 3$ の場合 $m \neq 0$ であり，式 (2.147) の両辺は m で割ることができる。したがって上述した $\sin\phi$ の候補は

$$\sin\phi = \frac{1}{m_c}\sin\frac{2\pi}{N}, \tag{2.148}$$

と書ける。ここで m_c は 0 でない整数であり、N は 3 以上の自然数である。これは，$\sin\phi$ がこのように与えられたとき，式 (2.147) を $l=1$ の場合に満たす整数 m としては $m=m_c$ が存在する，ということを意味する。この $\sin\phi$ は他の任意の l に対しても式 (2.147) を満たすような整数 m を持つことができるだろうか。式 (2.148) を式 (2.147) に代入すると，

$$\sin\frac{2\pi l}{N} = m\left(\frac{1}{m_c}\sin\frac{2\pi}{N}\right), \tag{2.149}$$

となる。この式は任意の l について満たされなければならないから，$l=2$ の場合を調べることにする。すると三角関数の倍角公式を用いて，

$$\cos\frac{2\pi}{N} = \frac{m}{2m_c}, \tag{2.150}$$

となる。$-1 \leq \cos\frac{2\pi}{N} \leq 1$ であるから $-2m_c \leq m \leq 2m_c$ である。これを満たす $N \geq 3$ の自然数 N を求めると，$N=3,4,6$ のみであることが分かる。例えば $m_c=1$ のとき $-2 \leq m \leq 2$ であるが，$m=-2$ ならば $N=2$，$m=-1$ ならば $N=3$，$m=0$ ならば $N=4$，$m=1$ ならば $N=6$ ，$m=2$ ならば $N=1,\infty$ が式 (2.150) の解となる。したがって $m_c=1$ のときに式 (2.149) を満たす $N \geq 3$ の自然数としては，いま N に無限大を含めないとすると，$N=3,4,6$ のみが可能である。他の m_c についても同様に調べてみると，やはり同様の結論に至ることが分かる。つまり式 (2.149) を満たす $N \geq 3$ の自然数としては $N=3,4,6$ のみが可能である。実際，式 (2.150) は $\cos\frac{2\pi}{N}$ が有理数になることを示しているが，$\cos\frac{2\pi}{N}$ を有理数にする自然数 N としては $N=1,2,3,4,6$ だけが可能である。証明は複雑であるので割愛する（例えば fal_math 氏のサイト中の記事 http://falmath.starfree.jp/blogs/sankakuhiyuurisu.html における「定理１」の証明を参照）。また，$N=3,4,6$ として他の $l=1,2,\ldots,N-1$ について調べてみても，やはり式 (2.149) を満たす整数 m が存在することが分かる。

以上を整理すると，$T^2/\mathbb{Z}_N$ の自然数 N としては，$N=2,3,4,6$ のみが可能である。それは点 $z=1$ および $z=\tau$ が T^2 上の $\mathbb{Z}_N$ 回転 $\hat{R}_0$ に対して自明な固定点となるために必要とされる制限である。また $N=3,4,6$ に対しては並進 $\hat{T}^2$ の方向 $\tau=e^{i\phi}$ も制限される。最もシンプルなのは $\tau=e^{2\pi i/N}$ ととることである。$N=2$ のときは $\mathrm{Im}\tau \neq 0$ 以外に制限はない。

最後に，ウィルソンライン位相を与える積分 $\hat{W}$ は，余剰空間次元が 1 次元の場合はその方向の並進 $\hat{U}$ に対応したひねり行列 U を用いて式 (2.68) のように定義されたが，2 次元の場合

は $\hat{T}_1$ と $\hat{T}_2$ の 2 つの並進があるので，それぞれを考慮して 2 つ定義される。それらを $\hat{W}_1$ および $\hat{W}_2$ とすると，

$$\begin{aligned}\hat{W}_1(x) &= W_1(x)T_1,\\ \hat{W}_2(x) &= W_2(x)T_2,\end{aligned} \tag{2.151}$$

$$\begin{aligned}W_1(x) &= P\mathrm{exp}\left\{-ig\int_{C_1}(A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z})\right\},\\ W_2(x) &= P\mathrm{exp}\left\{-ig\int_{C_2}(A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z})\right\},\end{aligned} \tag{2.152}$$

で定義される [34, 37]。$A_z(x, z, \bar{z})$，$A_{\bar{z}}(x, z, \bar{z})$ を A_z，$A_{\bar{z}}$ と略記した。C_1，C_2 は可縮でない周回経路（non-contractible roop；一点へと縮小することができないループ）についてとる。その中でも C_1 は z が 0 から 1 まで連続的にたどるような経路（例えばドーナツの穴の外周を一周する経路）をとり，C_2 は $\bar{z}$ が 0 から τ まで連続的にたどるような経路（例えばドーナツの「身」の断面の外周を一周する経路）をとる。

3　２次元オービフォルドにおける境界条件の表現行列（ひねり行列）の対角化

3.1　概要

本章では，信州大学の川村嘉春氏，九州大学の小島健太郎氏，愛知医科大学の山下敏史氏との共同研究 [39] で，$T^2/\mathbb{Z}_N$ $(N=2,3,4,6)$ オービフォルド上にコンパクト化された $SU(n)$ ないし $U(n)$ ゲージ理論におけるひねり行列の対角化可能性について調べた研究を紹介する。具体的には，そのひねり行列の組の同値類の中に必ず対角型のものが存在するかについて調べた。つまり，各オービフォルドのひねり行列として満たすべき制約条件や，ユニタリ変換，ゲージ変換を用いることで，どんなひねり行列のセットを与えられた場合でもそこに含まれる行列のすべてを同時対角化できるか，を調べた。結果，$T^2/\mathbb{Z}_2$ と $T^2/\mathbb{Z}_3$ においては各同値類の中に少なくともひとつの対角型の行列セットが存在することが示された。しかし $T^2/\mathbb{Z}_4$ と $T^2/\mathbb{Z}_6$ については，部分行列を対角型に並べたブロック対角型の形にはなるが，その部分行列の中には必ずしも対角型でないものが一般には含まれうることが示された。ひとつの体系的な述べ方は次のようなものである。まず，$T^2/\mathbb{Z}_N$ $(N=2,3,4,6)$ はいずれもブロック対角型の形になる事が示される。そしてそれらを構成する対角ブロックの部分行列は，$T^2/\mathbb{Z}_2$ では 2×2 と 1×1 の２種類，$T^2/\mathbb{Z}_3$ では 3×3 と 1×1 の２種類，$T^2/\mathbb{Z}_4$ では 4×4 と 2×2 と 1×1 の３種類，$T^2/\mathbb{Z}_6$ では 6×6 と 3×3 と 2×2 と 1×1 の４種類であることが示される。つまり N の約数を次数とした部分行列を対角に並べたブロック対角型行列になることが示される。そしていずれにおいても，$N\times N$ の部分行列は対角型になることが示される。そのため $T^2/\mathbb{Z}_2$ と $T^2/\mathbb{Z}_3$ は全体として対角型になる。しかし $T^2/\mathbb{Z}_4$ では 2×2，$T^2/\mathbb{Z}_6$ では 3×3 および 2×2 の行列に非対角型のものが現れうる。そのため $T^2/\mathbb{Z}_4$ と $T^2/\mathbb{Z}_6$ におけるひねり行列は全体としては必ずしも対角化されない，ということになる。

　第３章の構成は以下のとおりである。この節に続く 3.2 節では，$T^2/\mathbb{Z}_N$ のひねり行列を分析するのに便利な表式を用いて，$S^1/\mathbb{Z}_2$ のひねり行列において各同値類の中に少なくともひとつ，すべての行列が対角型であるようなものが存在することの証明 [32] を再現する。3.3 節では $T^2/\mathbb{Z}_N$ の基本的な事項について説明する。3.4 節から 3.7 節までの４つの節では，$T^2/\mathbb{Z}_2$，$T^2/\mathbb{Z}_3$，$T^2/\mathbb{Z}_4$，$T^2/\mathbb{Z}_6$ のそれぞれについて，ひねり行列として満たすべき制約条件とユニタリ変換とを用いることによって，ひねり行列が特殊な形の部分行列からなるブロック対角型の行列へと変換されることを示す。ただしその計算の詳細は複雑・大部であるので付録 C から F にまわし，議論の本流だけを示す。3.8 節では，$T^2/\mathbb{Z}_N$ のブロック対角型ひねり行列がゲージ

変換によってすべて同時に対角化されうるか否かを調べる。3.9 節でそれらの結果がもつ物理的意味の考察や具体例を示し，4 節でまとめと今後の展望を述べる。

3.2 $S^1/\mathbb{Z}_2$

２次元オービフォルドについて調べる前に，まずは $S^1/\mathbb{Z}_2$ について，先行研究 [32] とは少し違う手法で調べる。4 次元ミンコフスキー時空の座標を x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ で，オービフォルド $S^1/\mathbb{Z}_2$ 上の座標を y で表すことにする。オービフォルド $S^1/\mathbb{Z}_2$ は y に対して同一視条件 $y \sim y + 2\pi R$ と $y \sim -y$ を課すことによって得られる。ここで R は S^1 の半径である。この後の議論では余剰次元のサイズは無関係なので，簡単のため以後 $2\pi R = 1$ とおく。同一視と関連づけて，操作 $\mathcal{T} : y \to y + 1$ と $\mathcal{P}_0 : y \to -y$ を定義する。これらに加えて，$y = \pi R = 1/2$ のまわりの反転という操作 $\mathcal{P}_1 = \mathcal{T}\mathcal{P}_0$ を定義することができる。$\mathcal{I}$ を恒等操作とすれば，$\mathcal{P}_0^2 = \mathcal{P}_1^2 = \mathcal{I}$ である。

$M^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ 上のゲージ理論を考え，そのバルクにおけるゲージ群 G は $G = SU(n)$ もしくは $G = U(n)$ であるとする。また簡単のため，その理論におけるラグランジアンは大局的に $G' = U(n)$ のもとでの変換に対し不変であるとする。一般に，並進操作 $\mathcal{T}$ や反転操作 $\mathcal{P}_0$ および $\mathcal{P}_1$ には G' の表現空間における場の非自明な変換が伴うが，それらは境界条件によって記述される。本稿では，G' の基本表現空間において $\mathcal{T}$ や $\mathcal{P}_0$ に対応する操作はそれぞれ定数ユニタリ行列 T と P_0 によって与えられるものと定義する。そして $\mathcal{P}_1$ の行列表現は $P_1 \equiv TP_0$ と書くことにする。それらはひねり行列と呼ばれ，基本表現に属する場からなる理論においては次の制約条件を満たす[4]：

$$(P_0)^2 = (TP_0)^2 = I. \tag{3.1}$$

ここで I は単位行列である。以下では，G' の基本表現におけるひねり行列だけを調べることにする。そこで調べておけば，その他の表現行列に対しても，基本表現（と反基本表現）のテンソル積によって系統的に一般化することが可能である。

G' の表現空間における基底の変更によって，ひねり行列の形を単純化することができる。それは $WW^\dagger = I$ を満たす行列 W によるユニタリ変換 $P_0 \to WP_0W^\dagger$ および $T \to WTW^\dagger$ に

[4] より正確に言えば，ある理論に含まれている任意の場についての表現空間の上で，$(P_0)^2$ や $(TP_0)^2$ という作用（action）はそれらの場を変化させない，ということが無矛盾性（consitency）の要請から導かれる，ということになる。したがって例えば，もしもある理論が随伴表現しか持たなかったとしたら，$(P_0)^2$ と $(TP_0)^2$ は $SU(n)$ 群の中心にある部分群 $\mathbb{Z}_n$ の非自明な元に選ぶことができる。同様の議論は２つ以上のコンパクト化された余剰次元をもつ理論ではしばしば成り立ち，ホロノミーに関係した非自明な自由度ートフーフト・フラックス（'t Hooft flux）と呼ばれるーが存在することが示されている [45, 46]。しかし本研究ではこの問題には立ち入らない。

よってなされる。P_0 はユニタリ行列であるから，式 (3.1) は $P_0 = P_0^{-1} = P_0^\dagger$ であることを意味している。したがって基底を適切に選ぶことによって（別の言い方をすれば，適当なユニタリ変換によって）P_0 は対角化され，

$$P_0 = \begin{pmatrix} -I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_0)_{(11)} & (P_0)_{(12)} \\ (P_0)_{(21)} & (P_0)_{(22)} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} T_{(11)} & T_{(12)} \\ T_{(21)} & T_{(22)} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

となる。ここで I_{n_k} $(k = 1, 2)$ は $n_k \times n_k$ 単位行列であり，また $(P_0)_{(kl)}$ や $T_{(kl)}$ は $n_k \times n_l$ の部分行列である。n_k は非負の整数であり $n_1 + n_2 = \mathrm{rank}(P_0) = n$ を満たす。式 (3.2) から，$(P_0)_{(kl)} = (-1)^k \delta_{kl} I_{n_k}$ と書くことが出来る。以下，$T_{(kl)} = M^{[k-l]}_{k\,l}$ と書くことにする。ここで $k - l = q$ は $(P_0 T P_0^{-1})_{(k\,l)} = (-1)^{(k-l)} T_{(kl)}$ によって定義される $\mathbb{Z}_2$ チャージである。l を $k - q$，$T_{(kl)}$ を $M^{[k-l]}_{k\,l}$ で置き換えて書けば $(P_0 T P_0^{-1})_{(k\,k-q)} = (-1)^q M^{[q]}_{k\,k-q}$ である。また $M^{[k-l]}_{k\,l}$ においてて k と l は 2 を法とする整数であるとする。したがって $k' = k \pmod 2$ および $l' = l \pmod 2$ のとき，$M^{[k-l]}_{k\,l} = M^{[k'-l']}_{k\,l} = M^{[k-l]}_{k'\,l'}$ である。例えば下記の式 (3.3) の場合，そこで $k = 1$，$q = 1$ とおくと $M^{[1]\dagger}_{1\,0} = (-1)^{-1} M^{[-1]}_{0\,1}$ となるが，ここで述べた $M^{[k-l]}_{k\,l}$ の定義（記法）より $M^{[1]}_{1\,0} = M^{[-1]}_{1\,2}$ 等となるから，その式は $M^{[-1]\dagger}_{1\,2} = (-1)^1 M^{[1]}_{2\,1}$ と等価である。つまり $M^{[1]\dagger}_{1\,0} = (-1)^{-1} M^{[-1]}_{0\,1}$ は実質的には $M^{[-1]\dagger}_{1\,2}$ と $M^{[1]}_{2\,1}$ の間の関係を述べた式となる。以下，この $M^{[k-l]}_{k\,l}$ を使って各部分行列間の関係式を書き，計算を進めていく。この記法は $\mathbb{Z}_2$ オービフォルドでの記述においてはやや冗長であるが，後で $\mathbb{Z}_N$ $(N = 3, 4, 6)$ について議論するときに便利な記法である。また各数式の文字量が多くなって一見煩雑になるのだが，本稿の計算のように多数の部分行列間に複雑な関係式が成立するという場合には，各計算を整理したり見直したり，次のステップの見通しを立てたりする上で便利であることが分かったものである。なお $\mathbb{Z}_N$ のときには k と l は N を法とする整数であるとする。

P_0 を対角型に保ったまま，ユニタリ変換によって T をさらに単純化することができる。TP_0 はユニタリ行列であるから，式 (3.1) は $(TP_0)^\dagger = TP_0$ であることを意味している。そこで，$(T^\dagger)_{(kl)} = M^{[l-k]\dagger}_{l\,k}$ であることを用いて，

$$M^{[q]\dagger}_{k\,k-q} = (-1)^{-q} M^{[-q]}_{k-q\,k} \tag{3.3}$$

を得る。$TT^\dagger = I$ という条件からは，

$$\delta_{q0} I_{n_k} = (TT^\dagger)_{(kk-q)} = \sum_{q'} M^{[-q']}_{k\,k+q'} M^{[-q-q']\dagger}_{k-q\,k+q'} = \sum_{q'} (-1)^{q'+q} M^{[-q']}_{k\,k+q'} M^{[q'+q]}_{k+q'\,k-q} \tag{3.4}$$

が得られる。ここで q' についての和は任意の連続する整数についてとる。例えば $q' = 0, 1$ とか $q' = 1, 2$ などである。この式からは $M^{[0]}_{k\,k} M^{[1]}_{k\,k-1} = M^{[1]}_{k\,k-1} M^{[0]}_{k-1\,k-1}$ が導かれ，それはより一

般的な形として

$$M^{[0]}_{k\,k}M^{[q]}_{k\,k-q}=M^{[q]}_{k\,k-q}M^{[0]}_{k-q\,k-q} \tag{3.5}$$

と書ける。

式 (3.3) から $M^{[0]\dagger}_{k\,k}=M^{[0]}_{k\,k}$ であることが分かる。したがって $M^{[0]}_{k\,k}$ はユニタリ変換によって対角化可能である。つまり $M^{[0]}_{k\,k}$ の (i,j) 成分が $(M^{[0]}_{k\,k})_{ij}=a^i_k\delta_{ij}$ $(a^i_k\in\mathbb{R})$ で与えられるように基底を変換することが出来る。この基底において式 (3.5) は,

$$(a^i_k-a^j_{k-q})(M^{[q]}_{k\,k-q})_{ij}=0 \tag{3.6}$$

と書き換えることができ，$a^i_k\neq a^j_{k-q}$ ならば $(M^{[q]}_{k\,k-q})_{ij}=0$ であるという関係が成り立つ。すると，このユニタリ変換の後は行と列の適当な並び替えによって P_0 と T を簡潔な形に書き換えることができ,

$$P_0=\begin{pmatrix}P^{(0)}_0 & & & 0\\ & P^{(1)}_0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P^{(M)}_0\end{pmatrix},\qquad T=\begin{pmatrix}T^{(0)} & & & 0\\ & T^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T^{(M)}\end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

となる。ここで $P^{(\lambda)}_0$ と $T^{(\lambda)}$ $(\lambda=0,1,\dots,M)$ はそれぞれ,

$$P^{(\lambda)}_0=\begin{pmatrix}(P^{(\lambda)}_0)_{(11)} & (P^{(\lambda)}_0)_{(12)}\\ (P^{(\lambda)}_0)_{(21)} & (P^{(\lambda)}_0)_{(22)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-I_{n^{(\lambda)}_1} & 0\\ 0 & I_{n^{(\lambda)}_2}\end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

$$T^{(\lambda)}=\begin{pmatrix}M^{(\lambda)[0]}_{1\,1} & M^{(\lambda)[-1]}_{1\,2}\\ M^{(\lambda)[1]}_{2\,1} & M^{(\lambda)[0]}_{2\,2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{(\lambda)}I_{n^{(\lambda)}_1} & M^{(\lambda)[-1]}_{1\,2}\\ M^{(\lambda)[1]}_{2\,1} & a^{(\lambda)}I_{n^{(\lambda)}_2}\end{pmatrix} \tag{3.9}$$

であり，$n^{(\lambda)}_1$ と $n^{(\lambda)}_2$ は非負の整数，$a^{(\lambda)}$ は $\lambda\neq\lambda'$ に対して $a^{(\lambda)}\neq a^{(\lambda')}$ を満たす実数のパラメータである。そして (3.3) を導いたのと同様の議論により $M^{(\lambda)[q]\dagger}_{k\,k-q}=(-1)^{-q}M^{(\lambda)[-q]}_{k-q\,k}$ が成り立つ。なお，本稿を通して，$n^{(\lambda)}_1$ のようにアルファベット n に適当な添字をつけたものを行列のサイズを表すパラメーターとして頻繁に用いるが，それらはすべて非負の整数である。

T はユニタリ行列なので $T^{(\lambda)}$ についても $T^{(\lambda)}T^{(\lambda)\dagger}=I_{n^{(\lambda)}_1+n^{(\lambda)}_2}$ が成り立ち,

$$\sum_{q'}M^{(\lambda)[-q']}_{k\,k+q'}M^{(\lambda)[-q-q']\dagger}_{k-q\,k+q'}=\delta_{q0}I_{n^{(\lambda)}_k} \tag{3.10}$$

が導かれる。具体的に和を書き下して整理すると,

$$(1-a^{(\lambda)2})I_{n^{(\lambda)}_k}=M^{(\lambda)[-1]}_{k\,k+1}M^{(\lambda)[-1]\dagger}_{k\,k+1} \tag{3.11}$$

となる。右辺は非負なので，$a^{(\lambda)2} \leq 1$ が導かれる。$a^{(\lambda)2} = 1$ のときは $M^{(\lambda)[-1]}_{k\,k+1} = 0$ であるから，その場合 $T^{(\lambda)}$ はすでに対角型である。そこでそのような $T^{(\lambda)}$ たちはさらなる行列の並び替えによってひとまとめにして，それをあらためて $T^{(0)}$ とおくことにする。それによって $a^{(0)2} = 1$, $a^{(m)2} < 1 (m = 1, \ldots, M)$ であるような基底に移行し，$P^{(0)}$ と $T^{(0)}$ は ± 1 を要素とした対角行列とする。

次に $T^{(m)}$ $(m = 1, \ldots, M)$ の対角化を行う。まず線形代数の定理のひとつ,「2つの行列の積の階数はそれら2つの行列それぞれの階数のいずれよりも大きくなることはない」という定理を利用すると，$M^{(\lambda)[-1]}_{k\,k+1}$ の形を制限することができる。この定理により,

$$n^{(m)}_k = \mathrm{rank}(M^{(m)[-1]}_{k\,k+1} M^{(m)[-1]\dagger}_{k\,k+1}) \leq \mathrm{rank}(M^{(m)[-1]}_{k\,k+1}) \leq n^{(m)}_{k+1} \tag{3.12}$$

が成り立つ。ここで k と $k{+}1$ を入れ替えると，$n^{(m)}_{k+1} = \mathrm{rank}(M^{(m)[1]}_{k+1\,k} M^{(m)[1]\dagger}_{k+1\,k}) \leq \mathrm{rank}(M^{(m)[1]}_{k+1\,k}) \leq n^{(m)}_k$ である。したがって $n^{(m)}_1 = n^{(m)}_2$ である。そこで $n^{(m)}_1 = n^{(m)}_2 \equiv r^{(m)}$ とおくと，$M^{(m)[-1]}_{k\,k+1}$ は $r^{(m)} \times r^{(m)}$ の正方行列であることが分かる。すると式 (3.11) より，$M^{(m)[-1]}_{k\,k+1}$ は $U^{(m)}_{k\,k+1} U^{(m)\dagger}_{k\,k+1} = I_{r^{(m)}}$ を満たすユニタリ行列 $U^{(m)}_{k\,k+1}$ を用いて,

$$M^{(m)[-1]}_{k\,k+1} = \sqrt{1 - a^{(m)2}}\, U^{(m)}_{k\,k+1} \tag{3.13}$$

と書くことが出来る。同様に $M^{(m)[1]}_{k+1\,k} = -M^{(m)[-1]\dagger}_{k\,k+1} = -\sqrt{1 - a^{(m)2}}\, U^{(m)\dagger}_{k\,k+1}$ である。

このことから，$P^{(m)}_0$ と $T^{(m)}$ は

$$P^{(m)}_0 = \begin{pmatrix} -I_{r^{(m)}} & 0 \\ 0 & I_{r^{(m)}} \end{pmatrix}, \qquad T^{(m)} = \begin{pmatrix} \cos\theta^{(m)} I_{r^{(m)}} & \sin\theta^{(m)} U^{(m)}_{1\,2} \\ -\sin\theta^{(m)} U^{(m)\dagger}_{1\,2} & \cos\theta^{(m)} I_{r^{(m)}} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

と書くことができる。ここで

$$\cos\theta^{(m)} = a^{(m)}, \qquad \sin\theta^{(m)} = \sqrt{1 - a^{(m)2}} \tag{3.15}$$

とした。角度 $\theta^{(m)}$ は $0 < \theta^{(m)} < \pi$ の範囲にとるものとする。なお $a^{(m)} \neq a^{(m')}$ であるため，$m \neq m'$ のとき $\theta^{(m)} \neq \theta^{(m')}$ である。$P^{(m)}_0$ と $T^{(m)}$ がこのように書けることから，ユニタリ行列

$$V^{(m)} = \begin{pmatrix} iU^{(m)\dagger}_{1\,2} & 0 \\ 0 & I_{r^{(m)}} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

を用いたユニタリ変換により

$$P^{(m)}_0 \to V^{(m)} P^{(m)}_0 V^{(m)\dagger} = P^{(m)}_0 = \begin{pmatrix} -I_{r^{(m)}} & 0 \\ 0 & I_{r^{(m)}} \end{pmatrix} = p_0 \otimes I_{r^{(m)}},$$

$$T^{(m)} \to V^{(m)} T^{(m)} V^{(m)\dagger} = \begin{pmatrix} \cos\theta^{(m)} I_{r^{(m)}} & i\sin\theta^{(m)} I_{r^{(m)}} \\ i\sin\theta^{(m)} I_{r^{(m)}} & \cos\theta^{(m)} I_{r^{(m)}} \end{pmatrix} = t_1^{(m)} \otimes I_{r^{(m)}} \tag{3.17}$$

と変換されることが分かる。ここで p_0 と $t_1^{(m)}$ はパウリ行列 σ_i を用いて，

$$p_0 = -\sigma_3, \qquad t_1^{(m)} = i\sin\theta^{(m)}\sigma_1 + \cos\theta^{(m)} I_2 = e^{i\theta^{(m)}\sigma_1} \tag{3.18}$$

と定義される行列である。$t_1^{(m)}$ のほうは 2×2 巡回行列の形をしている。

この形になると，あとは余剰次元 y に依存したゲージ変換によって両者を同時対角化できる。すなわち，

$$\varOmega^{(m)}(y) = \exp\left[i\left(-\theta^{(m)} + l^{(m)}\pi\right) y\sigma_1\right], \qquad l^{(m)} \in \mathbb{Z} \tag{3.19}$$

を用いたゲージ変換により，

$$p_0 \to p_0' = \varOmega^{(m)}(-y) p_0 \varOmega^{(m)\dagger}(y) = p_0, \tag{3.20}$$

$$t_1^{(m)} \to t_1^{(m)\prime} = \varOmega^{(m)}(y+1) t_1^{(m)} \varOmega^{(m)\dagger}(y) = (-1)^{l^{(m)}} I_2, \tag{3.21}$$

となるから，

$$P_0^{(m)} = -\sigma_3 \otimes I_{r^{(m)}}, \qquad T^{(m)} = (-1)^{l^{(m)}} I_2 \otimes I_{r^{(m)}}, \quad \text{for} \quad m = 1, \ldots, M, \tag{3.22}$$

のように変換できる。すでに対角型であった $P_0^{(0)}$ と $T^{(0)}$ と並んで，$T^{(m)}$ もまた，$P_0^{(m)}$ を対角に保ったまま対角化される。すなわち P と T が全体として同時対角化される。なお任意の整数 $l^{(m)}$ に依存して T の要素は変わるから，P と T という２つのひねり行列が共に対角行列であるような組は，１つの同値類の中に一般には複数ありうるということになる。

3.3　２次元オービフォルドの基本的性質

以下の各節では，$M^4 \times T^2/\mathbb{Z}_N$ $(N = 2, 3, 4, 6)$ 上のゲージ理論について述べる。その準備として本節では，余剰次元が２次元（$2D$）オービフォルドであるときの基本的性質について整理する。その中でも，ここでの主な関心は $T^2/\mathbb{Z}_N$ 上の並進や回転の操作が満たすべき関係である。なぜならそれらが，各ひねり行列の形を制限することになり，その対角化可能性の問題に大きく関わるからである。

$2D$ トーラス T^2 へのコンパクト化は，$2D$ ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$（しばしば普遍被覆空間（universal covering space）と呼ばれる）を $2D$ 格子 $\mathbf{\Lambda}$ で区切り，それら全てを同一のものと

見なす（mod out）ことによって得られ，$T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbf{\Lambda}$ とも書かれる。$2D$ 格子 $\mathbf{\Lambda}$ はしばしば $\mathbf{\Lambda} = \{n_1\boldsymbol{\lambda}_1 + n_2\boldsymbol{\lambda}_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ と書かれる。$\boldsymbol{\lambda}_i$ $(i = 1, 2)$ は基底ベクトルである。T^2 上の座標ベクトル $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{y}'$ は，$\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y} \in \mathbf{\Lambda}$ が満たされる場合には同一視される。言い換えれば，T^2 上の y は次のような同一視関係を満たす。

$$\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{y} + n_1\boldsymbol{\lambda}_1 + n_2\boldsymbol{\lambda}_2. \tag{3.23}$$

T^2 および $2D$ オービフォルドを扱うにあたっては複素座標系を用いるのが便利である。T^2 上のデカルト座標 y^1 と y^2 から，$z = y^1 + iy^2$ という複素座標を作るとする。このとき式 (3.23) の同一視関係は，

$$z \sim z + n_1 + n_2\tau, \tag{3.24}$$

のように表される。簡単のために $\boldsymbol{\lambda}_1$ の (y^1, y^2) 成分を $(y^1, y^2) = (1, 0)$ とした。そうしても以下の議論の一般性が失われることはない。T^2 の幾何学的性質は複素パラメータ τ の値によって決まる。なお T^2 であるために $\mathrm{Im}\tau \neq 0$ でなければならない。T^2 の基本領域という概念があり，$\{p + q\tau \mid p, q \in [0, 1)\}$ という集合として与えられる。これは式 (3.24) の同一視によって被覆空間上に独立した領域として定義されるものであるとも言える。

並進 $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ を

$$\mathcal{T}_1 : z \to z + 1, \qquad \mathcal{T}_2 : z \to z + \tau, \tag{3.25}$$

のように定義する。このとき式 (3.24) の同一視関係は $z \sim \mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}z$ とも表される。また，何か特別な理論的設定をしない限り，通常は $2D$ 並進対称性の要請から $[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] = 0$ が成り立つと考えられる。[5]

オービフォルド $T^2/\mathbb{Z}_N$ は T^2 をさらに区切り，可換な離散群 $\mathbb{Z}_N$ $(N = 2, 3, 4, 6)$ に属する操作の上での同一視条件を課すことによって得られる。まず $\mathbb{Z}_N$ の要素は複素座標系においては単位元 1 の N 乗根 $e^{2\pi i/N}$ から生成され，$\mathbb{Z}_N$ 回転 $\mathcal{R}_0$ として

$$\mathcal{R}_0 : z \to e^{2\pi i/N}z, \tag{3.26}$$

が定義される。そして T^2 トーラス上の複素座標 z に対し，回転 (3.26) のもとでの同一視，すなわち $z \sim \mathcal{R}_0 z$ という条件を課すと，オービフォルド $T^2/\mathbb{Z}_N$ が得られる。式 (3.26) から $(\mathcal{R}_0)^N = \mathcal{I}$ である。$\mathcal{I}$ は恒等操作である。

[5] $2D$ 並進対称性は例えばある種の磁束を生じさせるような非自明な場の配位を仮定することによって破られうる [47]。これは興味深い理論的可能性を持つものであるが，本稿では考察しない。

$T^2/\mathbb{Z}_N$	relations among translations	τ
$T^2/\mathbb{Z}_3$	$\prod_{m=1}^{3}\mathcal{T}_m=\mathcal{I}$	$e^{2\pi i/3}$
$T^2/\mathbb{Z}_4$	$\prod_{m=1}^{4}\mathcal{T}_m=\mathcal{I},\quad \mathcal{T}_1\mathcal{T}_3=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_4=\mathcal{I}$	$e^{2\pi i/4}$
$T^2/\mathbb{Z}_6$	$\prod_{m=1}^{6}\mathcal{T}_m=\mathcal{I},\quad \mathcal{T}_1\mathcal{T}_4=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_5=\mathcal{T}_3\mathcal{T}_6=\mathcal{I},\quad \mathcal{T}_1\mathcal{T}_3\mathcal{T}_5=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_4\mathcal{T}_6=\mathcal{I}$	$e^{2\pi i/6}$

Table 1: Relations among translations

$T^2/\mathbb{Z}_N$ $(N=3,4,6)$ における τ の選択は，この $\mathcal{R}_0$ を考慮すると，無矛盾性（consistency）の要請によって制限される（2.2.7 節参照)。本稿では以後 $N=3,4,6$ については $\tau=e^{2\pi i/N}$ ととることにする。$N=2$ のときは，τ は $\mathrm{Im}\tau\neq 0$ さえ満たしていれば任意のものを選ぶことが出来る。

$N=3,4,6$ のとき，$\mathcal{T}_2$ は $\mathcal{T}_2=\mathcal{R}_0\mathcal{T}_1\mathcal{R}_0^{-1}$ と書くことができる。さらに，一般に $\tau^{m-1}=e^{2\pi i(m-1)/N}(m\in\{1,\ldots,N\})$ の方向への並進として

$$\mathcal{T}_m=\mathcal{R}_0^{m-1}\mathcal{T}_1\mathcal{R}_0^{1-m},\qquad \mathcal{T}_m: z\to z+\tau^{m-1},\qquad \text{for}\quad N=3,4,6, \tag{3.27}$$

を定義することができる。$\mathcal{T}_m$ は並進であるから，何か特別な理論的設定をしない限りは $[\mathcal{T}_m,\mathcal{T}_{m'}]=0$ が任意の m と m' について成り立つ。また，異なる $\mathcal{T}_m$ 同士の間には表 1 に示すような関係があることも分かる。これらの関係式は式 (3.27) から求めることもできるし，τ が 1 の N 乗根であるということから求めることもできる。これらの条件は整数 p と N/p を用いて $(\mathcal{T}_m\mathcal{R}_0^p)^{N/p}=\mathcal{I}$ と書くことができる [48]。また，任意の $2D$ 並進が 2 つの並進 $\mathcal{T}_m$ と $\mathcal{T}_{m'}$ を基底として表すことができることも確認できる。例えば $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ を基底として選んだとき，任意の $\mathcal{T}_m$ は $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ で表せるそして上述のように $\mathcal{T}_2=\mathcal{R}_0\mathcal{T}_1\mathcal{R}_0^{-1}$ という関係があるので，式 (3.27) でも示されているように任意の $\mathcal{T}_m$ は $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{R}_0$ で表せる。

他方，$N=2$ のときは $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{R}_0$ を決めても $\mathcal{T}_2$ は決まらない。$N=2$ のときの τ に対する条件は $\mathrm{Im}\tau\neq 0$ だけであり，その条件のもとで任意だからである。したがって $N=2$ のときは $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ と $\mathcal{R}_0$ はそれぞれ独立である。

オービフォルド $T^2/\mathbb{Z}_N$ の普遍被覆空間上には，$\mathcal{R}_0$ のもとで不変な点がいくつかあり，固定点と呼ばれている。そして $\mathcal{R}_0$ とは別に，これら固定点のまわりの回転というものが以下のように定義される。まず固定点を z_{F} とすると，これは

$$z_{\mathrm{F}}=e^{2\pi i/N}z_{\mathrm{F}}+n_1+n_2\tau,\qquad n_1,n_2\in\mathbb{Z}, \tag{3.28}$$

を満たす。この式の解を $z_{\mathrm{F},N}^{(n_1,n_2)}$ とすると，それらは N ごとに次のように書ける。

$$z_{\mathrm{F},2}^{(n_1,n_2)}=\frac{n_1+n_2\tau}{2}\qquad (\mathrm{Im}\tau\neq 0),\qquad z_{\mathrm{F},3}^{(n_1,n_2)}=\frac{2n_1-n_2+(n_1+n_2)e^{2\pi i/3}}{3}, \tag{3.29}$$

$$z_{\mathrm{F},4}^{(n_1,n_2)} = \frac{n_1 - n_2 + (n_1+n_2)e^{2\pi i/4}}{2}, \qquad z_{\mathrm{F},6}^{(n_1,n_2)} = -n_2 + (n_1+n_2)e^{2\pi i/6}. \tag{3.30}$$

ここで，$\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0$ $(n_1, n_2 \in \mathbb{Z})$ という操作が固定点 $z_{\mathrm{F},N}^{(n_1,n_2)}$ のまわりの $\mathbb{Z}_N$ 回転を与えるということに着目する（$\mathcal{T}_1$ や $\mathcal{T}_2$ はそれぞれの N のもとで与えられる $\mathcal{T}_1$ や $\mathcal{T}_2$ である）。このことは，式 $\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0 z = e^{2\pi i/N}(z-u)+u$ を u について解くと，その解は (3.28) に他ならない，ということから理解することができる。（この式の右辺はある点 z をある点 u のまわりに $\mathbb{Z}_N$ 回転させることを意味するが，この等式を解くと $u = e^{2\pi i/N}u + n_1 + n_2\tau$ になる。したがって左辺はある点 z を固定点 u のまわりに $\mathbb{Z}_N$ 回転させるものであるということが分かる）。したがって関係式 $(\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0)^N = \mathcal{I}$ が成り立つ。他方，$\mathbb{Z}_4$ には $\mathbb{Z}_2$ という部分群があることに着目する。同様に $\mathbb{Z}_6$ には $\mathbb{Z}_2$ と $\mathbb{Z}_3$ という部分群がある。したがって $T^2/\mathbb{Z}_4$ における $\mathbb{Z}_2$ 操作や $T^2/\mathbb{Z}_6$ における $\mathbb{Z}_3$ および $\mathbb{Z}_2$ 操作というものが自然に定義される。そこで $N=4$ の場合における部分群 $\mathbb{Z}_2$ のもとでの固定点を

$$z_{\mathrm{F},4,2}^{(n_1,n_2)} = \frac{n_1 + n_2 i}{2}, \tag{3.31}$$

と書くことにする。$z_{\mathrm{F},4,2}$ のまわりの π 回転は $N=4$ のもとでの $\mathcal{T}_1$，$\mathcal{T}_2$ を用いて $(\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0^2)^2$ で与えられ，$(\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0^2)^2 = \mathcal{I}$ を満たす。同様に $N=6$ の場合の，部分群 $\mathbb{Z}_2$ および $\mathbb{Z}_3$ のもとでの固定点はそれぞれ

$$z_{\mathrm{F},6,2}^{(n_1,n_2)} = \frac{n_1 + n_2 e^{2\pi i/6}}{2}, \qquad z_{\mathrm{F},6,3}^{(n_1,n_2)} = \frac{n_1 - n_2 + (n_1+2n_2)e^{2\pi i/6}}{3}, \tag{3.32}$$

と書ける。$z_{\mathrm{F},6,2}^{(n_1,n_2)}$ のまわりの π 回転や $z_{\mathrm{F},6,3}^{(n_1,n_2)}$ のまわりの $2\pi/3$ は，$N=6$ のもとでの $\mathcal{T}_1$，$\mathcal{T}_2$ を用いてそれぞれ $\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0^3$ および $\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0^2$ で与えられ，それらは $(\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0^3)^2 = \mathcal{I}$ および $(\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0^2)^3 = \mathcal{I}$ を満たす。

上に述べたような様々な並進や回転の基底として，$N=2$ の場合には $\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{R}_0\}$ を，$N=3,4,6$ の場合には $\{\mathcal{T}_1, \mathcal{R}_0\}$ を選ぶことができる。どんな操作でもこれらの基底となる操作によって表すことができる。並進 $\mathcal{T}_m$ や各固定点のまわりでの回転はそれら相互間でも様々な関係を持つが，それらの関係もまた，上に述べた基底の様々な組み合わせの間に成り立つ関係として表せる。

$N=3,4,6$ の場合，回転に関して先述した諸関係のうち $\mathcal{R}_0^N = \mathcal{I}$ を除くすべては，並進に関して先述した諸関係と $\mathcal{R}_0^N = \mathcal{I}$ だけを用いて導くこともできる。例として任意の固定点のまわりの $\mathbb{Z}_N$ $(N=3,4,6)$ 回転を考える。それは $\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0$ で与えられ $(\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0)^N = \mathcal{I}$ を満たすものであった。この関係式は並進に関する関係式と $\mathcal{R}_0^N = \mathcal{I}$ とから次のようにして導

かれる。まず，式 (3.27) で与えられる $\mathcal{T}_m$ の定義から，$\mathcal{R}_0^k\mathcal{T}_1^i\mathcal{T}_2^j = \mathcal{T}_{1+k}^i\mathcal{T}_{2+k}^j\mathcal{R}_0^k$ が成り立つことに着目する。なお $\mathcal{T}_{m+N} = \mathcal{T}_m$ である。この式を利用すれば，$(\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0)^N$ の中の $\mathcal{R}_0$ をすべて右端へと寄せ集めることで，

$$(\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0)^N = \mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_1+n_2}\cdots\mathcal{T}_N^{n_1+n_2}\mathcal{T}_1^{n_2}\mathcal{R}_0^N = (\mathcal{T}_1\cdots\mathcal{T}_N)^{n_1+n_2} = \mathcal{I}^{n_1+n_2} = \mathcal{I}, \tag{3.33}$$

が導かれる。ここで $\mathcal{R}_0^N = \mathcal{I}$，$[\mathcal{T}_m, \mathcal{T}_{m'}] = 0$ および $\prod_{m=1}^N \mathcal{T}_m = \mathcal{I}$ を用いた。

もうひとつの例として $N{-}6$ の場合における π 回転である $\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0^3$ を考える。$(\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0^3)^2 = \mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{T}_4^{n_1}\mathcal{T}_5^{n_2}\mathcal{R}_0^6 = (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_4)^{n_1}(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_5)^{n_2} = \mathcal{I}$ となる。ここでは $\mathcal{R}_0^6 = \mathcal{I}$，$[\mathcal{T}_m, \mathcal{T}_{m'}] = 0$，$\mathcal{T}_1\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_5 = \mathcal{I}$ を用いた。こうして $(\mathcal{T}_1^{n_1}\mathcal{T}_2^{n_2}\mathcal{R}_0^3)^2 = \mathcal{I}$ も求められる。これらの具体例と同様に，回転に関して上で議論した他の様々な関係も，並進に関する関係式と $\mathcal{R}_0^N = \mathcal{I}$ とから求められる。回転が関与する操作としてはそれら以外にもさらに，異なる固定点間を移動しながら合計で N 回回転するという複雑な操作も考えうるが，それらは一般に並進と $\mathcal{R}_0$ を用いて $\prod_{a=1}^N(\mathcal{T}_1^{n_1^{(a)}}\mathcal{T}_2^{n_2^{(a)}}\mathcal{R}_0) = \mathcal{T}_1^{n'_1}\mathcal{T}_2^{n'_2}$ と書くことができる。ここで $n_1^{(a)}$，$n_2^{(a)}$，n'_1，n'_2 はいずれも整数である。したがって，$N = 3, 4, 6$ の場合の独立な関係式としては $[\mathcal{T}_m, \mathcal{T}_{m'}] = 0$ $(m, m' \in \{1, \ldots, N\})$，表 1 の関係式，そして $\mathcal{R}_0^N = \mathcal{I}$ を考えるだけで十分である。

本研究では以下，$M^4 \times T^2/\mathbb{Z}_N$ 上のゲージ理論を想定して計算を行っていく。$M^4 \times T^2/\mathbb{Z}_N$ 上の座標は x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ および $z = x^5 + ix^6$ と書くことにする。$S^1/\mathbb{Z}_2$ の場合と同様に，並進と $\mathbb{Z}_N$ 回転は $G' = U(n)$ の表現空間における非自明な「ひねり」（twist）を伴うと考えられる。ここで $G' = U(n)$ は，そのもとでラグランジアンが不変であると仮定されている変換のなす群である。本論文ではそれらの操作に対応するひねり行列をイタリック体のアルファベットで表すことにする。たとえば $\mathcal{T}_m$ に対応するものを T_m と書くことにする。これらは基本表現に属するユニタリ行列とする。これらの行列は，対応する並進や回転が満たしているのと同じ関係式を満たすように形が制約される。たとえば $[\mathcal{T}_m, \mathcal{T}_{m'}] = 0$ という関係式は，対応するひねり行列に対して $[T_m, T_{m'}] = 0$ という制約を課す。以下の各節で示されるように，これらの制約条件がうまく働くことによって，ひねり行列は適当な基底やゲージのもとで単純な形へと，一般性を失うことなく書き換えていくことができる。

3.4 $T^2/\mathbb{Z}_2$

本節では，余剰次元が $T^2/\mathbb{Z}_2$ である場合のひねり行列について議論する。具体的には，それらが 2×2 と 1×1 の部分行列をブロックとして持ちうるブロック対角型行列に必ず書けることを述べる。そのことを，任意の基底・任意の行列要素でブロック対角型でない形で行列が与

えられた場合でも，$T^2/\mathbb{Z}_2$ のひねり行列として満たさなければならない制約条件を考慮すれば，基底の変換（ユニタリー変換）によって必ずブロック対角型の行列に変換できる，という形で述べる。議論の流れが見えづらくなるのを避けるため，本節の記述では技術的な計算の詳細は省く。すなわち変換の各ステップで行列がどのような形になるか，またそれはどのような条件式や関係式から導かれるのか，を示しながら議論の本流を追っていくことを重視する。それらを導く計算の技術的な詳細は付録 C で示す。

$T^2/\mathbb{Z}_2$ における独立なひねり行列としては T_1，T_2，R_0 の 3 つがあり，それら 3 つが 1 組となって理論の振る舞いを決定する。三者の間には

$$[T_1, T_2] = 0, \qquad R_0^2 = (T_1R_0)^2 = (T_2R_0)^2 = (T_1T_2R_0)^2 = I, \tag{3.34}$$

という制約条件がある。ここで I は単位行列である。

3.2 節で $S^1/\mathbb{Z}_2$ について式 (3.17) と式 (3.18) を得たときと同様の議論によって，まず R_0 および T_1 の 2 つを同時にブロック対角化することができる。すなわち，それぞれを式 (3.7) における P_0 および T と同様の形にできる。このとき T_2 も変換を受けるが，こちらはまだ一般にはブロック対角型にはならない。3 つのひねり行列はそれぞれ,

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_0^{(0)} & & & \\ & R_0^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_0^{(M)} \end{pmatrix}, \qquad T_1 = \begin{pmatrix} T_1^{(0)} & & & \\ & T_1^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_1^{(M)} \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} T_2^{(00)} & T_2^{(01)} & \dots & T_2^{(0M)} \\ T_2^{(10)} & T_2^{(11)} & \dots & T_2^{(1M)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_2^{(M0)} & T_2^{(M1)} & \dots & T_2^{(MM)} \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

と表される。ここで R_0，T_1，T_2 の部分行列をそれぞれ $R_0^{(\lambda)}$，$T_1^{(\lambda)}$，$T_2^{(\lambda\lambda')}(\lambda, \lambda' = 0, 1, \dots, M)$ と書いた。3.2 節のときと同様，$R_0^{(0)}$ と $T_1^{(0)}$ は 1 または -1 を固有値とする $r^{(0)} \times r^{(0)}$ 対角行列である。以降本節や付録 C.1 で $r^{(0)}$ のように行列のサイズを表すパラメータをしばしば用いるが，それらはいずれも非負の整数である。なお他節と違い本節ではアルファベット n でなく r に適当な添字をつけたものを最初から用いるが，これは 3.2 節で式 (3.14) 以降に n でなく r を用いて書いていたのを受けたものである。3.2 節との関連を参照するときの便をとってそのようにした。他の部分行列，$R_0^{(m)}$ や $T_1^{(m)}(m = 1, \dots, M)$ は $2r^{(m)} \times 2r^{(m)}$ の行列であり，

$$R_0^{(m)} = \begin{pmatrix} -I_{r^{(m)}} & 0 \\ 0 & I_{r^{(m)}} \end{pmatrix} = -\sigma_3 \otimes I_{r^{(m)}}, \tag{3.37}$$

$$T_1^{(m)} = \begin{pmatrix} \cos\theta^{(m)} I_{r^{(m)}} & i\sin\theta^{(m)} I_{r^{(m)}} \\ i\sin\theta^{(m)} I_{r^{(m)}} & \cos\theta^{(m)} I_{r^{(m)}} \end{pmatrix} = e^{i\theta^{(m)}\sigma_1} \otimes I_{r^{(m)}}, \tag{3.38}$$

で与えられる。ここで $0 < \theta^{(m)} < \pi$ であり，$m \neq m'$ のとき $\theta^{(m)} \neq \theta^{(m')}$ である。これらに対応して，$T_2^{mm'}$ は $2r^{(m)} \times 2r^{(m')}$ の行列である。

式 (3.34) に示された制約条件を考慮しつつ適切なユニタリ変換を用いることにより，R_0 と T_1 を上記のような構造のものに保ったまま，残るもうひとつのひねり行列である T_2 もブロック対角型の行列へと変換することができる。

まず $T_2^{(m0)}$ と $T_2^{(0m)}$ については，すべて零行列でなければならないことが制約条件 (3.34) からすぐに導かれる。詳細は付録 C.1 に示す。

次に $T_2^{(00)}$ に着目する。R_0 と T_1 のほうでここに対応するブロックである $R_0^{(0)}$ と $T_1^{(0)}$ を対角行列の形に保ったまま，$T_2^{(00)}$ をブロック対角型に変換できるとよい。実際付録 C.2 に示すようにそれは可能である。このとき $R_0^{(0)}$，$T_1^{(0)}$，$T_2^{(00)}$ は，

$$R_0^{(0)} = \begin{pmatrix} R_0^{(0),1} & 0 \\ 0 & R_0^{(0),2} \end{pmatrix}, \qquad T_1^{(0)} = \begin{pmatrix} T_1^{(0),1} & 0 \\ 0 & T_1^{(0),2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{r_1^{(0)}} & 0 \\ 0 & I_{r_2^{(0)}} \end{pmatrix}, \tag{3.39}$$

$$T_2^{(00)} = \begin{pmatrix} T_2^{(00),1} & 0 \\ 0 & T_2^{(00),2} \end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

のように書かれる。ここで $R_0^{(0),a}$，$T_1^{(0),a}$，$T_2^{(00),a} (a = 1, 2)$ は $r^{(0),a} \times r^{(0),a}$ の行列であり，$r^{(0),1} + r_2^{(0),2} = r^{(0)}$ である。$R_0^{(0),a} (a = 1, 2)$ は 1 または -1 を固有値とする対角行列である。$R_0^{(0),a}$，$T_1^{(0),a}$，$T_2^{(00),a}$ はさらに行と列の並び替えによって，

$$R_0^{(0),a} = \begin{pmatrix} R_0^{(0),a,0} & & & \\ & R_0^{(0),a,1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_0^{(0),a,M^{(0),a}} \end{pmatrix}, \tag{3.41}$$

$$T_1^{(0),a} = \begin{pmatrix} T_1^{(0),a,0} & & & \\ & T_1^{(0),a,1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_1^{(0),a,M^{(0),a}} \end{pmatrix}, \tag{3.42}$$

$$T_2^{(00),a} = \begin{pmatrix} T_2^{(00),a,0} & & & \\ & T_2^{(00),a,1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_2^{(00),a,M^{(0),a}} \end{pmatrix}, \tag{3.43}$$

という形に書ける。ここで行列 $A_\alpha^{(0),a}$ の対角ブロックの数をパラメータ $M^{(0),a}$ として表した。$R_0^{(0),a,b}$，$T_1^{(0),a,b}$，$T_2^{(00),a,b}$ は行列である。つまり $R_0^{(0)}$，$T_1^{(0)}$，$T_2^{(00)}$ をブロック対角型に書いたときの対角ブロックである $R_0^{(0),a}$，$T_1^{(0),a}$，$T_2^{(00),a}$ は，それら自身もまたさらに細かい部分行列からなるブロック対角型行列として書けるということである。このとき $b=0$ の部分行列，つまり各々の左上端の部分行列 $R_0^{(0),a,0}$，$T_1^{(0),a,0}$，$T_2^{(00),a,0}$ はいずれも 1 または -1 を固有値とする $r^{(0),a,0}\times r^{(0),a,0}$ 対角行列である。それら以外の $b=1,\dots,M^{(0),a}$ のものについては，

$$R_0^{(0),a,b}=-\sigma_3\otimes I_{r^{(0),a,b}},\quad T_1^{(0),a,b}=(-1)^a I_2\otimes I_{r^{(0),a,b}},\quad T_2^{(00),a,b}=e^{i\phi^{(0),a,b}\sigma_1}\otimes I_{r^{(0),a,b}},\tag{3.44}$$

のように書ける。ここで $\phi^{(0),a,b}$ は $0<\phi^{(0),a,b}<\pi$ の範囲に値を取るパラメータであり，$b\neq b'$ ならば $\phi^{(0),a,b}\neq\phi^{(0),a,b'}$ である。σ_1 はパウリ行列のひとつで，式 (3.38) のときと同様，j 行 k 列目の要素を $(\sigma_1)_{jk}$ $(j,k=1,2)$ とすると $(\sigma_1)_{jk}=1-\delta_{jk}$ と書かれるものを用いた。式 (3.44) より，$T_2^{(00)}$ をブロック対角型行列として構成する部分行列 $T_2^{(00),a,m}$ $(m=0,1,\dots,M^{(0),a})$ は式 (3.38) に示した $T_1^{(m)}$ と同様の構造をもっていることが分かる。両者には「並べ替えると 2×2 行列をブロック対角型に複数個並べた行列になる」という共通点があり，このために，後述するように最終的には両者とも 2×2 行列をブロック対角型に複数個並べた行列として統一的に書けるようになる。

以上で，式 (3.36) の行列を構成する部分行列 $T_2^{(mm')}$ のうち $T_2^{(00)}$，$T_2^{(0m)}$，$T_2^{(m0)}$ について検討した。次に，残る部分行列 $T_2^{(mm')}(m,m'\neq0)$ について検討する。まず制約条件 (3.34) を考慮すると，$m\neq m'$ のとき $T_2^{(mm')}=0$ であるように基底を選ぶことが可能であることが導かれる。導出は付録 C.3 に示す。したがって任意の行列が与えられた場合でもユニタリ変換によってこの基底に移行し，T_2 を

$$T_2=\begin{pmatrix}T_2^{(00)} & & & \\ & T_2^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_2^{(M)}\end{pmatrix},\tag{3.45}$$

のようなブロック対角型に書くことが可能である。ここで $T_2^{(00)}$ はすでに検討した $r^{(0)}\times r^{(0)}$ 部分行列であり，$T_2^{(m)}$ $(m=1,\dots,M)$ は $2r^{(m)}\times 2r^{(m)}$ 部分行列である。

式 3.35 および (3.37)，(3.38) に示した $R_0^{(m)}$ と $T_1^{(m)}$，そして式 (3.45) に示した $T_2^{(m)}$ は，ユニタリ変換によってそれら自身もまたより小さな行列を構成要素とするブロック対角型行列へと変換できることが，やはり制約条件から分かる。詳細は付録 C.4 に示す。このとき $R_0^{(m)}$，

$T_1^{(m)}$，$T_2^{(m)}$ はそれぞれ，

$$R_0^{(m)} = \begin{pmatrix} R_0^{(m),1} & & & \\ & R_0^{(m),2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_0^{(m),M^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{3.46}$$

$$T_1^{(m)} = \begin{pmatrix} T_1^{(m),1} & & & \\ & T_1^{(m),2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_1^{(m),M^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{3.47}$$

$$T_2^{(m)} = \begin{pmatrix} T_2^{(m),1} & & & \\ & T_2^{(m),2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_2^{(m),M^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{3.48}$$

と書ける。ここで $R_0^{(m),a}$，$T_1^{(m),a}$，$T_2^{(m),a}$ $(a=1,\ldots,M^{(m)})$ は $2r^{(m),a}\times 2r^{(m),a}$ の部分行列であり，$\sum_{a=1}^{M^{(m)}} r^{(m),a} = r^{(m)}$ である。これらの部分行列は，

$$R_0^{(m),a} = -\sigma_3 \otimes I_{r^{(m),a}}, \qquad T_1^{(m),a} = e^{i\theta^{(m)}\sigma_1} \otimes I_{r^{(m),a}}, \tag{3.49}$$

$$T_2^{(m),a} = \begin{pmatrix} \cos\phi^{(m),a} I_{r^{(m),a}} & i\sin\phi^{(m),a} I_{r^{(m),a}} \\ i\sin\phi^{(m),a} I_{r^{(m),a}} & \cos\phi^{(m),a} I_{r^{(m),a}} \end{pmatrix} = e^{i\phi^{(m),a}\sigma_1} \otimes I_{r^{(m),a}}. \tag{3.50}$$

と書ける。$\phi^{(m),a}$ は実数パラメータであり，$a \neq a'$ ならば $\phi^{(m),a} \neq \phi^{(m),a'}$ である。

以上より，$T^2/\mathbb{Z}_2$ の独立なひねり行列 R_0，T_1，T_2 は，すべて 2×2 および 1×1 部分行列を構成要素とするブロック対角型行列に書けることが次のようにして分かる。まず $R_0^{(0),a,0}$，$T_1^{(0),a,0}$，$T_2^{(00),a,0}$ は 1 または -1 を固有値とする対角行列であるから，1×1 行列を対角に並べたものと言える。$R_0^{(0),a,b}$，$T_1^{(0),a,b}$，$T_2^{(00),a,b}$ $(a=1,2)(b=1,\ldots,M^{(0),a})$ については，式 (3.44) のように書かれたものに対して行と列の並び替えを行うことにより，それぞれ

$$r_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t_1 = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t_2 = \begin{pmatrix} b_2 & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \tag{3.51}$$

という 2×2 行列を対角に並べたブロック対角型行列の形に書ける。ここで b_1 は $\mathrm{Im}\, b_1 > 0$ を満たす純虚数であり，b_2 は実数である。両者は独立ではなく，両者の間には $|b_1|^2 + b_2^2 = 1$ という関係式が成り立つ。$R_0^{(m),a}$，$T_1^{(m),a}$，$T_2^{(m),a}$ $(a=1,\ldots,M^{(m)})$ については，式 (3.49) および (3.50) のように書かれたものに対して行と列の並び替えを行うことにより，それぞれ

$$r_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t_1 = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad t_2 = \begin{pmatrix} b_2 & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \tag{3.52}$$

という 2×2 行列を構成要素とするブロック対角型行列の形に書くことができる。ここで a_1 と b_1 は純虚数であり，前者は $\mathrm{Im}\, a_1 > 0$ を満たす。a_2 と b_2 は実数である。これらの間には $|a_1|^2 + a_2^2 = 1$，$|b_1|^2 + b_2^2 = 1$ という関係が成り立つ。3.8 節で述べるように，これらは適切なゲージ変換によってすべて同時対角化される。

3.5　$T^2/\mathbb{Z}_3$

次に $T^2/\mathbb{Z}_3$ オービフォルドについて調べる。$T^2/\mathbb{Z}_2$ のときとは違い，独立なひねり行列は 2 つである。2 つのひねり行列が決まれば残りはこの 2 つの組み合わせで表せる。本稿では R_0 と T_1 を選び，その同時対角化について述べる。残りの行列はこの 2 つを用いて，

$$T_2 = R_0 T_1 R_0^{-1}, \quad T_3 = R_0^{-1} T_1 R_0, \quad R_1 = T_1 R_0, \quad R_2 = T_1 T_2 R_0 = R_0^{-1} T_1^{-1} R_0^{-1}, \tag{3.53}$$

のように表せる。R_1 と R_2 はそれぞれ固定点 $z_{\mathrm{F},3}^{(1,0)}$ と $z_{\mathrm{F},3}^{(1,1)}$（式 (3.29) 参照）のまわりの $\mathbb{Z}_3$ 回転（$2\pi/3$ 回転）に対応するものである。これら相互の間には，

$$R_0^3 = R_1^3 = R_2^3 = R_0 R_1 R_2 = R_1 R_2 R_0 = R_2 R_0 R_1 = I, \tag{3.54}$$

$$T_{m'} T_m = T_m T_{m'}, \quad T_1 T_2 T_3 = I, \quad T_{m+1} R_0 = R_0 T_m, \tag{3.55}$$

という関係が成立する。これまでと同様に I は単位行列を表す。また $T_{m+N} = T_m$ である。なお R_0 と T_1 の 2 つを同時対角化の対象として選んだのは，それが最も計算を簡単にしたからである。他の 2 つの行列，例えば R_0 と R_1 の 2 つを選んでも同じ結論に達するが，計算は少し複雑になる。

一般性を失うことなく R_0 はただちに対角化できる。そしてその固有値は $\omega = e^{2\pi i/3}$ を用いて ω^k $(k = 1, 2, 3)$ と表せる。一般にはその 3 種類の値が対角線上にランダムな順番で並んだような行列になるが，行と列の並び替えによって，

$$R_0 = \begin{pmatrix} \omega I_{n_1} & & \\ & \omega^2 I_{n_2} & \\ & & I_{n_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_0)_{(11)} & (R_0)_{(12)} & (R_0)_{(13)} \\ (R_0)_{(21)} & (R_0)_{(22)} & (R_0)_{(23)} \\ (R_0)_{(31)} & (R_0)_{(32)} & (R_0)_{(33)} \end{pmatrix}, \quad (R_0)_{(kl)} = \omega^k \delta_{kl} I_{n_k}, \tag{3.56}$$

という 3×3 ブロックの形にして（別の言い方をすれば，R_0 がそのように書けるような基底を選び），議論を進めることができる。ここで n_k は非負の整数であり I_{n_k} は $n_k \times n_k$ の単位行列である。このとき T_1 は

$$T_1 = \begin{pmatrix} (T_1)_{(11)} & (T_1)_{(12)} & (T_1)_{(13)} \\ (T_1)_{(21)} & (T_1)_{(22)} & (T_1)_{(23)} \\ (T_1)_{(31)} & (T_1)_{(32)} & (T_1)_{(33)} \end{pmatrix}, \quad (T_1)_{(kl)} = M_{k\,l}^{[k-l]}, \tag{3.57}$$

と書ける。$S_1/\mathbb{Z}_2$ のときと同様，T_1 の部分行列 $(T_1)_{(kl)}$ を表すのに $M^{[k-l]}_{k\,l}$ を用いる。$M^{[k-l]}_{k\,l}$ は $n_k \times n_l$ の行列であり，そして $M^{[k-l]}_{k\,l}$ における k と l はここでは 3 を法とする整数であるとする（$S_1/\mathbb{Z}_2$ のところで述べたように，一般に $\mathbb{Z}_N$ の場合 k と l は N を法とする整数であるとする）。すなわち $k' = k \pmod 3$ および $l' = l \pmod 3$ のとき $M^{[k-l]}_{k\,l} = M^{[k'-l']}_{k\,l} = M^{[k-l]}_{k'\,l'}$ であるとする。たとえば $k = 1 = 4 = -2 = \ldots \pmod 3$ であり，したがって $M^{[-1]}_{1\,2} = M^{[-1]}_{4\,5}$, $M^{[-1]}_{1\,2} = M^{[2]}_{1\,2}$ などとなる。上付き添字 $k-l=q$ の値は R_0 によって生成される $\mathbb{Z}_3$ 対称性のチャージの値，すなわち $(R_0 T_1 R_0^{-1})_{(k\,l)} = \omega^{k-l}(T_1)_{(kl)}$ で定義されるチャージの値 $k-l=q$ に等しい。l を $k-q$，$(T_1)_{(kl)}$ を $M^{[k-l]}_{k\,l}$ に置き換えて書けば $(R_0 T_1 R_0^{-1})_{(k\,k-q)} = \omega^q M^{[q]}_{k\,k-q}$ である。この記法は添字が多く一見煩雑だが，本研究で行うような計算においては色々な関係式を系統的に記述するのに便利な記法である。

$T_2/\mathbb{Z}_3$ におけるひねり行列 R_a の定義 $R_a^3 = I$ $(a = 0,1,2)$ と，T_1 がユニタリ行列であるということ（$T_1^\dagger = T_1^{-1}$），および制約条件 (3.53) とから，異なる $M^{[k-l]}_{k\,l}$ 間に成り立つ関係式として，

$$M^{[q]}_{k\,k-q} M^{[-q]}_{k-q\,k} = M^{[-q]}_{k\,k+q} M^{[q]}_{k+q\,k}, \quad M^{[0]}_{k\,k} M^{[q]}_{k\,k-q} = M^{[q]}_{k\,k-q} M^{[0]}_{k-q\,k-q}, \tag{3.58}$$

が導かれる。導出は付録 D.1 に示す。なお同様の式は他の $T_2/\mathbb{Z}_N$ $(N = 2,3,4,6)$ でも現れてくるものであり，式 (H.3) に集約される。式 (3.58) の 2 番めの式から，付録 D.1 の最後に示した議論によって，$M^{[0]}_{k\,k}$ が正規行列であることが導かれる。したがって $M^{[0]}_{k\,k}$ はその複素共役と交換すること，また適切なユニタリ変換によって対角化可能であることが分かる。

なお，N が偶数であるような他の $T_2/\mathbb{Z}_N$ のケースでは $M^{[0]}_{k\,k}$ は正規行列であるのみならずエルミート行列であることまで言える。他方この $T_2/\mathbb{Z}_3$ のケースでは一般に $M^{[0]}_{k\,k}$ がエルミート行列であるとまでは言えない。しかし正規行列であることは言えるので，やはり対角化可能であるということになる。本稿の計算にとっては対角化可能であることが言えれば十分なので，その違いが最終的な結論に影響を及ぼすことはない。しかし他の何らかの計算にとっては，この違いが何か興味深い帰結をもたらすこともあるかもしれない。

$M^{[0]}_{k\,k}$ が $(M^{[0]}_{k\,k})_{ij} = a^i_k \delta_{ij}$ のように対角化されたとき，その他の行列 $M^{[q]}_{k\,k}$ $(q \neq 0)$ について，$a^i_k \neq a^j_{k-q}$ ならば $(M^{[q]}_{k\,k-q})_{ij} = 0$ でなければならない，ということが制約条件から導かれる。詳細は付録 D.2 に示す。すると R_0 と T_1 は適当な行と列の並び替えによって，

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_0^{(1)} & & & \\ & R_0^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_0^{(M)} \end{pmatrix}, \quad R_0^{(m)} = \begin{pmatrix} \omega I_{n_1^{(m)}} & & \\ & \omega^2 I_{n_2^{(m)}} & \\ & & I_{n_3^{(m)}} \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

$$
T_1 = \begin{pmatrix} T_1^{(1)} & & & \\ & T_1^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_1^{(M)} \end{pmatrix}, \quad T_1^{(m)} = \begin{pmatrix} a^{(m)} I_{n_1^{(m)}} & M_{1\,2}^{(m)[-1]} & M_{1\,3}^{(m)[1]} \\ M_{2\,1}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_2^{(m)}} & M_{2\,3}^{(m)[-1]} \\ M_{3\,1}^{(m)[-1]} & M_{3\,2}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_3^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{3.60}
$$

のようにブロック対角化できる。ここで $n_k^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots, M)$ は非負の整数であり，$a^{(m)}$ は複素数であって，$m \neq m'$ ならば $a^{(m)} \neq a^{(m')}$ である。

T_1 がユニタリであるという条件 $T_1 T_1^\dagger = T_1^\dagger T_1 = I$ からは，

$$
M_{k\,k-1}^{(m)[1]} M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger} + M_{k\,k+1}^{(m)[-1]} M_{k\,k+1}^{(m)[-1]\dagger} = (1 - \left|a^{(m)}\right|^2) I_{n_k^{(m)}}, \tag{3.61}
$$

が導かれる。導出は付録 D.3 に示す。ここからまず $|a^{(m)}| \leq 1$ でなければならないことが分かる。そして $|a^{(m)}| = 1$ のときには $M_{k\,k-1}^{(m)[1]} = M_{k\,k+1}^{(m)[-1]} = 0$ であることが分かる。$M_{k\,k-1}^{(m)[1]}$ と $M_{k\,k+1}^{(m)[-1]}$ は式 (3.60) に明示されているように $T_1^{(m)}$ の非対角ブロックをなす部分行列であるから，これらがすべて 0 であるときには $T_1^{(m)}$ は対角型である。つまり $|a^{(m)}| = 1$ であるような $T_1^{(m)}$ はこの時点ですでに対角型であることが分かる。

$0 < |a^{(m)}| < 1$ のときと $|a^{(m)}| = 0$ のときについてはそれぞれに込み入った計算が必要になるが，制約条件 (3.54) と (3.55)（$T_2/\mathbb{Z}_3$ のひねり行列であるために必要な条件），および $T_1 T_1^\dagger = I$（本稿で理論に $G' = U(n)$ の大域的対称性があることを仮定したことにより付加された条件）から，いずれの場合にもユニタリ変換や行列の並び替えによって $M_{k\,k\mp1}^{(m)[\pm1]}$ を対角化できることが分かる。詳細はそれぞれ付録 D.3.1 と付録 D.3.2 に示す。つまり $T_1^{(m)}$ の部分行列はすべて対角型にできることが示される。すると行と列を適当に並べ替えることにより，$T_1^{(m)}$ は 3×3 行列を対角ブロックとするブロック対角型行列の形に書くことができる。この並び替えに際して $R_0^{(m)}$ は行列要素の並び順が変わるが，対角行列であるという点では変わらない。つまり $R_0^{(m)}$ を対角型に保ったまま，$T_1^{(m)}$ をブロック対角型に変換することができる。このとき $R_0^{(m)}$ と $T_1^{(m)}$ はそれぞれ，

$$
r_0 = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t_1 = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \tag{3.62}
$$

という 3×3 行列を対角に並べたブロック対角型行列になる。ここで a_1，a_2，a_3 はいずれも複素数であり，$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - 3a_1 a_2 a_3 = 1$，$|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 = 1$，$\overline{a_1} a_3 + \overline{a_3} a_2 + \overline{a_2} a_1 = 0$ を満たす。最初の式は制約条件 $T_1 T_2 T_3 = T_1 T_3 T_2 = I$ とユニタリ条件 $T_1 T_1^\dagger = I$ に由来する式 (D.13)，(D.14)，(D.16) から導かれる。残りの 2 式は $T_1 T_1^\dagger = I$ に由来する式 (D.16) と (D.17) からそれぞれ導かれる。

以上の議論から，$T_2/\mathbb{Z}_3$ の独立なひねり行列として本節で選んだ R_0 と T_1 は，適切なユニタリ変換により 3×3 または 1×1 行列を要素とするブロック対角型行列へと同時に変換できることが分かる。1×1 行列と呼んだのは $|a^{(m)}|=1$ であるような $T_1^{(m)}$ の要素のことである。上述のとおりその場合の $T_1^{(m)}$ はすでに普通の対角行列であるが，これは 1×1 部分行列を対角ブロックとするブロック対角型行列であると見なすことができるからである。それに対応する $R_0^{(m)}$ も同様である。そして 3.8 節で，3×3 行列のほうもすべて適切なゲージ変換によって同時対角化されること，したがって R_0 と T_1 が全体として同時対角化されることが示される。

なお t_1 のような形に要素が並んだ行列を「巡回行列」と呼ぶが，一般の巡回行列の定義には要素の数値間の相互依存関係は存在しない（あってもなくてもよい)。t_1 はその要素が上記の式によって関係づけられたやや特殊な巡回行列ということになる。そしてまた，3.8 節で示すように，ゲージ変換も対角要素がゼロの巡回行列の組み合わせで表すことができる。このことが何か深い意味を持っているのかどうかは現在のところ不明である。

3.6 $T^2/\mathbb{Z}_4$

本節では $T^2/\mathbb{Z}_4$ オービフォルドについて議論する。$T^2/\mathbb{Z}_3$ のときと同様に R_0 と T_1 を独立な 2 つのひねり行列として選び，制約条件とユニタリ変換を駆使することでそれらが 4×4，2×2，1×1 の 3 種類の部分行列を対角ブロックとして持ちうるブロック対角型行列へと変換されることを見る。各ステップごとの計算の詳細は付録 E に示し，ここではどのような前提からどのような関係式が帰結し，そして各行列がどのように変換されていくのかについて議論の本流を示す。

R_0 と T_1 の形を制限する制約条件は，

$$T_1^\dagger = T_1^{-1}, \qquad T_{m'}T_m = T_m T_{m'}, \qquad T_1 T_3 = I, \tag{3.63}$$

で与えられる。T_m は 3.3 節で述べたように $T_m = R_0^{m-1}T_1R_0^{1-m}$ である。

これまでと同様，ひねり行列の少なくともひとつは基底を適当に選ぶことによってすぐに対角型に書ける。R_0 をそれに選ぶとすると，$T_2/\mathbb{Z}_4$ の場合は $R_0^4=I$ なのでその固有値は 1，i，-1，$-i$ の 4 種類である。一般にそれら 4 種類の数字がランダムに並んだ対角行列になるが，行と列を適当に並べ替えることによって（つまり基底の要素の並び方を適当に変えること

で），一般性を失うことなく，

$$R_0 = \begin{pmatrix} iI_{n_1} & & & \\ & -I_{n_2} & & \\ & & -iI_{n_3} & \\ & & & I_{n_4} \end{pmatrix}, \qquad T_1 = \begin{pmatrix} (T_1)_{(11)} & (T_1)_{(12)} & (T_1)_{(13)} & (T_1)_{(14)} \\ (T_1)_{(21)} & (T_1)_{(22)} & (T_1)_{(23)} & (T_1)_{(24)} \\ (T_1)_{(31)} & (T_1)_{(32)} & (T_1)_{(33)} & (T_1)_{(34)} \\ (T_1)_{(41)} & (T_1)_{(42)} & (T_1)_{(43)} & (T_1)_{(44)} \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

という行列に書くことができる。ここで I_{n_k} は $n_k \times n_k$ の単位行列であり，$(T_1)_{(kl)}$ はそれに対応した $n_k \times n_l$ の部分行列である。ここでさらに，式 (E.2) より $(T_1)_{(kk)}$ は適当なユニタリ変換をほどこすことによってすべて対角化できること，また $T_1^\dagger(= T_1^{-1} = T_3) = R_0^2 T_1 R_0^{-2}$ と $T_{m'}T_m = T_m T_{m'}$ から導かれる関係式 (E.4) より，その他の非対角ブロックの部分行列においていくつかの要素はゼロでなければならないことが導かれる。それらの結果，R_0 と T_1 は行と列の適当な並び替えによって，

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_0^{(1)} & & & \\ & R_0^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_0^{(M)} \end{pmatrix}, \qquad T_1 = \begin{pmatrix} T_1^{(1)} & & & \\ & T_1^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_1^{(M)} \end{pmatrix}, \qquad (3.65)$$

というブロック対角型の行列に書き換えることができる。ここで $R_0^{(m)}$ と $T_1^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots, M)$ は $n^{(m)} \times n^{(m)}$ の行列であり，それぞれ，

$$R_0^{(m)} = \begin{pmatrix} iI_{n_1^{(m)}} & & & \\ & -I_{n_2^{(m)}} & & \\ & & -iI_{n_3^{(m)}} & \\ & & & I_{n_4^{(m)}} \end{pmatrix}, \qquad (3.66)$$

ならびに

$$T_1^{(m)} = \begin{pmatrix} a^{(m)} I_{n_1^{(m)}} & M_{1\,2}^{(m)[-1]} & M_{1\,3}^{(m)[-2]} & M_{1\,4}^{(m)[1]} \\ M_{2\,1}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_2^{(m)}} & M_{2\,3}^{(m)[-1]} & M_{2\,4}^{(m)[-2]} \\ M_{3\,1}^{(m)[2]} & M_{3\,2}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_3^{(m)}} & M_{3\,4}^{(m)[-1]} \\ M_{4\,1}^{(m)[-1]} & M_{4\,2}^{(m)[2]} & M_{4\,3}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_4^{(m)}} \end{pmatrix}, \qquad (3.67)$$

で与えられる。$n_k^{(m)}$ は $n^{(m)} = \sum_{k=1}^4 n_k^{(m)}$ を満たす非負の整数である。$T_1^{(m)}$ の部分行列は式 (3.64) の記法にならって $(T_1^{(m)})_{kl}$ と書けるが，$k \neq l$ のものについては $(T_1^{(m)})_{(kl)} = M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$，$k = l$ のものについては $(T_1^{(m)})_{(kk)} = M_{k\,k}^{(m)[0]} = a^{(m)} I_{n_k^{(m)}}$ と書いた。$a^{(m)}$ は $m \neq m'$ のとき $a^{(m)} \neq a^{(m')}$ であるような実数パラメータであり，$-1 \leq a^{(m)} \leq 1$ を満たす。なお $T_2/\mathbb{Z}_3$ のときは $a^{(m)}$ をより一般的に複素数としたが，ここではさらに制限して実数とおける。式 (E.2) よ

り $(T_1)_{(kk)}$ はエルミート行列であることが言えるからである。$M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ の記法は $M_{k\,l}^{[k-l]}$ と同じで，今議論している $T_2/\mathbb{Z}_4$ の場合は k と l は 4 を法とする整数であり，$k = k'(\mathrm{mod}4)$ および $l = l'(\mathrm{mod}4)$ のとき $M_{k\,l}^{(m)[k-l]} = M_{k\,l}^{(m)[k'-l']} = M_{k'\,l'}^{(m)[k-l]}$ である。n_k や $n_k^{(m)}$ のように行列のサイズを表すパラメータを本節や付録 E でもしばしば用いるが，いずれも非負の整数である。式 (E.11) より $a^{(m)} = \pm 1$ のときにはすべての非対角ブロックがゼロになるため，そのような $a^{(m)}$ の値をもつ $T_1^{(m)}$ はこの時点ですでに対角型である。以下では $-1 < a^{(m)} < 1$ であるような $T_1^{(m)}$ についてその対角化を議論する。

R_0 と T_1 に対し，制約条件 (3.63) から導かれる式 (E.8)，(E.9)，(E.10) を考慮した適切なユニタリ変換をほどこすと，$M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ は式 (E.24)，(E.25)，(E.28) で表されるような形に変換される。すると $R_0^{(m)}$ と $T_1^{(m)}$ は適当な行と列の並び替えにより，以下に $R_0^{(m)} = R_0^{(m)\prime} \oplus R_0^{(m)\prime\prime}$ および $T_1^{(m)} = T_1^{(m)\prime} \oplus T_1^{(m)\prime\prime}$ として示すような形になる：

$$R_0^{(m)} = \begin{pmatrix} R_0^{(m)\prime} & \\ & R_0^{(m)\prime\prime} \end{pmatrix} = R_0^{(m)\prime} \oplus R_0^{(m)\prime\prime}, \tag{3.68}$$

$$R_0^{(m)\prime} = \begin{pmatrix} iI_{r^{(m)}} & & & \\ & -I_{r^{(m)}} & & \\ & & -iI_{r^{(m)}} & \\ & & & I_{r^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{3.69}$$

$$R_0^{(m)\prime\prime} = \begin{pmatrix} iI_{n_1^{(m)\prime}} & & & \\ & -I_{n_2^{(m)\prime}} & & \\ & & -iI_{n_1^{(m)\prime}} & \\ & & & I_{n_2^{(m)\prime}} \end{pmatrix}, \tag{3.70}$$

および,

$$T_1^{(m)} = \begin{pmatrix} T_1^{(m)\prime} & \\ & T_1^{(m)\prime\prime} \end{pmatrix} = T_1^{(m)\prime} \oplus T_1^{(m)\prime\prime}, \tag{3.71}$$

$$T_1^{(m)\prime} = \begin{pmatrix} a^{(m)} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{1\,2}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{1\,3}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{1\,4}^{(m)} \\ \hat{M}^{(m)[1]} U_{2\,1}^{(m)} & a^{(m)} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{2\,3}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{2\,4}^{(m)} \\ \hat{M}^{(m)[2]} U_{3\,1}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{3\,2}^{(m)} & a^{(m)} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{3\,4}^{(m)} \\ \hat{M}^{(m)[1]} U_{4\,1}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{4\,2}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{4\,3}^{(m)} & a^{(m)} I_{r^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{3.72}$$

$$T_1^{(m)\prime\prime} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{U}_{1\,3}^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{U}_{2\,4}^{(m)} \\ \tilde{U}_{3\,1}^{(m)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{U}_{4\,2}^{(m)} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.73}$$

ここで $\hat{M}^{(m)[1]}$ は $r^{(m)} \times r^{(m)}$ 対角行列であり，その要素はすべて正，すなわち $(\hat{M}^{(m)[1]})_{ii} > 0$ である。$\hat{M}^{(m)[2]}$ は $r^{(m)} \times r^{(m)}$ 対角行列であり，その要素はすべて非負，すなわち $(\hat{M}^{(m)[2]})_{ii} \geq 0$

である。そして $U_{34}^{(m)}$ は $r^{(m)}\times r^{(m)}$ の，$\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)}$ および $\tilde{U}_{k-2\,k}^{(m)}$ は $n_k^{(m)\prime}\times n_k^{(m)\prime}$ のユニタリ行列である。なお，$R_0^{(m)\prime\prime}$ および $T_1^{(m)\prime\prime}$ が現れるのは $a^{(m)}=0$ のときだけである。$a^{(m)}\neq 0$ のときは $R_0^{(m)}=R_0^{(m)\prime}$ および $T_1^{(m)}=T_1^{(m)\prime}$ である。

続けてさらに，やはり制約条件 (3.63) によって各部分行列間に相互依存関係が課されていることを利用した適切なユニタリ変換をほどこすことによって，$T_1^{(m)\prime}$ や $T_1^{(m)\prime\prime}$ の各部分行列 $\hat{M}^{(m)[k-l]}U_{k\,l}^{(m)}$ や $\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)}$ をすべて同時に対角化することができる。そして $T_1^{(m)\prime}$ と $T_1^{(m)\prime\prime}$ はそれぞれ式 (E.44) と式 (E.45) のような形になる。この変換に際し $R_0^{(m)\prime}$ と $R_0^{(m)\prime\prime}$ は変わらない。その形になると，あとは行と列の適当な並び替えによってブロック対角型の行列になる。やってみると，$T_1^{(m)}$ は一般に 4×4，2×2，1×1 の 3 種類の行列を部分行列として持ちうるブロック対角型の行列になることが分かる。この並び替えに際して $R_0^{(m)}$ のほうでも対角要素の並び順の入れ替えが生じるが，全体として対角行列であるという点では変わらない。そして $T_1^{(m)}$ の各対角ブロックに対応して，4×4，2×2，1×1 の 3 種類の対角行列を並べたような行列になる。

式 (3.69) と (E.44) より，$R_0^{(m)}$ と $T_1^{(m)}$ を構成する 4×4 部分行列は，それぞれ以下の r_0 と t_1 のような形に書ける：

$$r_0=\begin{pmatrix} i & & & \\ & -1 & & \\ & & -i & \\ & & & 1 \end{pmatrix},\qquad t_1=\begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix}. \tag{3.74}$$

ここで a_1 と a_3 は $a_3=-\overline{a_1}$ を満たす複素数，a_2 は非負の実数，a_4 は実数である。これらのパラメータの間には $2|a_1|^2+a_2^2+a_4^2=1$ および $2a_2a_4=a_1^2+\overline{a_1}^2$ という関係式が成立する。3.8 節で見るように，これらの 4×4 部分行列は適切なゲージ変換によりすべて同時に対角化される。

$a^{(m)}=0$ であるような $T_1^{(m)}$ については，このほかに 2×2 行列も対角ブロックとして現れる。$R_0^{(m)}$ のほうでその部分に対応する行列もまた 2×2 行列である。式 (3.70) と (E.45) より，そのとき $R_0^{(m)}$ と $T_1^{(m)}$ に現れる 2×2 行列はそれぞれ，

$$r_0'=i^{n'}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad t_1'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.75}$$

のように書ける。ここで n' は整数である。3.8 節で見るように，これらの 2×2 行列はゲージ変換によって同時対角化することができない。ただし，R_0 の中に n' が偶数である r_0' と n' が奇数である r_0' とが一つずつあった場合，行と列の並び替えによってそれらを混ぜ合わせて式 (3.74) の r_0 のような 4×4 行列の体裁にすることができる。このとき T_1 のほうではそれに対応して 2 つの t_1' の要素が混ぜ合わされ，式 (3.74) の t_1 において $a_2=1$ かつ $a_1=a_3=a_4=0$

とおいたような 4×4 行列が作られる。そしてこれは適切なゲージ変換により対角化される。したがって R_0 と T_1 が同時対角化できないのは，n' が偶数である r_0' と n' が奇数である r_0' の数とが一致せず，そのためペアを組めずに 2×2 行列のまま残る r_0' および t_1' があった場合である。計算してみると，その数はちょうど $|n_1^{(m)'} - n_2^{(m)'}|$ になることが分かる。

$a^{(m)} = \pm 1$ であるような $T_1^{(m)}$ については，先述したようにすでに対角型である。式 (3.67) ですべての非対角ブロックが零行列になり，したがって $a^{(m)} I_{n_1^{(m)}+n_2^{(m)}+n_3^{(m)}+n_4^{(m)}}$ すなわち $a^{(m)} I_{n^{(m)}}$ と書けるような，単位行列に比例した対角行列になる。

3.7 $T^2/\mathbb{Z}_6$

本節では $T^2/\mathbb{Z}_6$ の場合を議論する。やはり複数のひねり行列が 1 セットになって理論の振る舞いに寄与するが，$T^2/\mathbb{Z}_3$，$T^2/\mathbb{Z}_4$ の場合と同様，独立なものは 2 つである。どれか 2 つの行列を決めれば残りの行列は一意に決まる。これまでの節と同様にここでもその 2 つとして R_0 と T_1 を選び，それらが同時対角化されるかを論じる。議論の構成はこれまでの節と同じであるが，ここであらためて整理しておくと次のようになる。まずそれらが $T^2/\mathbb{Z}_6$ のひねり行列であると言えるために満たさなければならない制約条件や，今回の研究でそれらがユニタリ行列であると設定したことを考慮すると，それらは 6×6，3×3，2×2，1×1 の 4 種類の行列を部分行列として持ちうるブロック対角型行列に書けることが導かれる。それ以外の形で行列が与えられた場合でも，適切なユニタリ変換を用いることで必ずその形に書けることが導かれる。本節ではそれが複数回のユニタリ変換や行と列の並び替えによって段階的に達成されていくという形で述べるが，その計算の詳細は煩雑なので付録 F に示す。ここでは，それら各段階で行列がどのような形になるのか，またそれはどのような条件式に依拠して導かれるのか，という議論の本流を述べる。計算すべき行列が一般には式 (3.81) のように 6×6 ブロックの行列（36 個の部分行列を 6×6 に並べたもの）となって一見煩雑になり，関連する関係式の数も多くなるが，基本的にはこれまでの節と同じ要領で計算を進めていける。そして最終的にブロック対角型の行列になったとき，その部分行列のうち 6×6 行列のものは適切なゲージ変換によって対角化できることが 3.8 節で示される。

R_0 と T_1 の形に対する制約条件は，

$$T_1^\dagger = T_1^{-1}, \qquad T_{m'} T_m = T_m T_{m'}, \qquad T_1 T_4 = I, \qquad T_1 T_3 T_5 = I, \tag{3.76}$$

で与えられる。ここで T_m は 3.3 節で説明したように $T_m = R_0^{m-1} T_1 R_0^{1-m}$ である。

出発点として，

$$R_0 = \begin{pmatrix} \eta I_{n_1} & & & & & \\ & \eta^2 I_{n_2} & & & & \\ & & -I_{n_3} & & & \\ & & & -\eta I_{n_4} & & \\ & & & & -\eta^2 I_{n_5} & \\ & & & & & I_{n_6} \end{pmatrix}, \tag{3.77}$$

および

$$T_1 = \begin{pmatrix} (T_1)_{(11)} & (T_1)_{(12)} & (T_1)_{(13)} & (T_1)_{(14)} & (T_1)_{(15)} & (T_1)_{(16)} \\ (T_1)_{(21)} & (T_1)_{(22)} & (T_1)_{(23)} & (T_1)_{(24)} & (T_1)_{(25)} & (T_1)_{(26)} \\ (T_1)_{(31)} & (T_1)_{(32)} & (T_1)_{(33)} & (T_1)_{(34)} & (T_1)_{(35)} & (T_1)_{(36)} \\ (T_1)_{(41)} & (T_1)_{(42)} & (T_1)_{(43)} & (T_1)_{(44)} & (T_1)_{(45)} & (T_1)_{(46)} \\ (T_1)_{(51)} & (T_1)_{(52)} & (T_1)_{(53)} & (T_1)_{(54)} & (T_1)_{(55)} & (T_1)_{(56)} \\ (T_1)_{(61)} & (T_1)_{(62)} & (T_1)_{(63)} & (T_1)_{(64)} & (T_1)_{(65)} & (T_1)_{(66)} \end{pmatrix}, \tag{3.78}$$

をとる。ここで $\eta = e^{2\pi i/6}$ であり，I_{n_k} は大きさ $n_k \times n_k$ の単位行列，$(T_1)_{(kl)}$ は大きさ $n_k \times n_l$ の部分行列である。$(T_1)_{(kl)}$ は全てが完全に独立な行列ではなく，制約条件 (3.76) から導かれる諸関係式によって相互に関係づけられ，制限されている。そして $T_1^\dagger (= T_1^{-1} = T_4) = R_0^3 T_1 R_0^{-3}$ および $T_{m'} T_m = T_m T_{m'}$ から導かれる関係式 (F.5) を用いると，3.2 節で述べた $S^1/\mathbb{Z}_2$ のケースと同様にして，適当な行と列の並び替えにより R_0 と T_1 はブロック対角型の行列に書き直せる。つまり，

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_0^{(1)} & & & \\ & R_0^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_0^{(M)} \end{pmatrix}, \qquad T_1 = \begin{pmatrix} T_1^{(1)} & & & \\ & T_1^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_1^{(M)} \end{pmatrix}, \tag{3.79}$$

のように，$n^{(m)} \times n^{(m)}$ 部分行列 $R_0^{(m)}$ および $T_1^{(m)}$ $(m = 1, 2, \cdots, M)$ を対角に並べたものとして書くことができ，$R_0^{(m)}$ と $T_1^{(m)}$ はそれぞれ，

$$R_0^{(m)} = \begin{pmatrix} \eta I_{n_1^{(m)}} & & & & & \\ & \eta^2 I_{n_2^{(m)}} & & & & \\ & & -I_{n_3^{(m)}} & & & \\ & & & -\eta I_{n_4^{(m)}} & & \\ & & & & -\eta^2 I_{n_5^{(m)}} & \\ & & & & & I_{n_6^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{3.80}$$

および

$$
T_1^{(m)} = \begin{pmatrix}
a^{(m)} I_{n_1^{(m)}} & M_{1\,2}^{(m)[-1]} & M_{1\,3}^{(m)[-2]} & M_{1\,4}^{(m)[-3]} & M_{1\,5}^{(m)[2]} & M_{1\,6}^{(m)[1]} \\
M_{2\,1}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_2^{(m)}} & M_{2\,3}^{(m)[-1]} & M_{2\,4}^{(m)[-2]} & M_{2\,5}^{(m)[-3]} & M_{2\,6}^{(m)[2]} \\
M_{3\,1}^{(m)[2]} & M_{3\,2}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_3^{(m)}} & M_{3\,4}^{(m)[-1]} & M_{3\,5}^{(m)[-2]} & M_{3\,6}^{(m)[-3]} \\
M_{4\,1}^{(m)[3]} & M_{4\,2}^{(m)[2]} & M_{4\,3}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_4^{(m)}} & M_{4\,5}^{(m)[-1]} & M_{4\,6}^{(m)[-2]} \\
M_{5\,1}^{(m)[-2]} & M_{5\,2}^{(m)[3]} & M_{5\,3}^{(m)[2]} & M_{5\,4}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_5^{(m)}} & M_{5\,6}^{(m)[-1]} \\
M_{6\,1}^{(m)[-1]} & M_{6\,2}^{(m)[-2]} & M_{6\,3}^{(m)[3]} & M_{6\,4}^{(m)[2]} & M_{6\,5}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_6^{(m)}}
\end{pmatrix}, \tag{3.81}
$$

で与えられる。ここで $n^{(m)} = \sum_{k=1}^{6} n_k^{(m)}$ であり，$T_1^{(m)}$ の部分行列は $k \neq l$ すなわち非対角ブロックの行列については $(T_1^{(m)})_{(kl)} = M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$，$k = l$ すなわち対角ブロックの行列については $(T_1^{(m)})_{(kk)} = M_{k\,k}^{(m)[0]} = a^{(m)} I_{n_k^{(m)}}$ で表した。$a^{(m)}$ は実数パラメータであり，$m \neq m'$ に対して $a^{(m)} \neq a^{(m')}$ であるとともに，$-1 \leq a^{(m)} \leq 1$ の範囲に制限される。$M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ は $k' = k \pmod 6$ および $l' = l \pmod 6$ に対して $M_{k\,l}^{(m)[k-l]} = M_{k\,l}^{(m)[k'-l']} = M_{k'\,l'}^{(m)[k-l]}$ となる行列である。n_k や $n_k^{(m)}$ のように行列のサイズを表すパラメータは，以降の数式でも色々な記号で用いるが，すべて非負の整数である。$a^{(m)} = \pm 1$ の場合は $T_1^{(m)}$ はすでに対角行列であり，したがって T_1 はすでに対角行列であって対角化を考える必要はないので，以下では $-1 < a^{(m)} < 1$ の場合を考える。

次に，制約条件 (3.76) から導かれる他の関係式 (F.9)，(F.10)，(F.11)，(F.12) を用いると，非対角ブロック $M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ は右上の添字 $[k-l]$ によって分類され，適切な基底を選ぶことにより（別言すれば，適切なユニタリ変換により），それぞれ式 (F.21)，(F.22)，(F.27)，(F.28)，(F.30) のように表せる形になることが分かる。その表式を用いると，行と列の適当な並び替えによって $T_1^{(m)}$ はさらに $T_1^{(m)} = T_1^{(m)\prime} \oplus T_1^{(m)\prime\prime} \oplus T_1^{(m)\prime\prime\prime}$ と表せるようなブロック対角型の形になり，それに応じて $R_0^{(m)}$ も $R_0^{(m)} = R_0^{(m)\prime} \oplus R_0^{(m)\prime\prime} \oplus R_0^{(m)\prime\prime\prime}$ と表せるような形になる。ここで $R_0^{(m)\prime}$，$T_1^{(m)\prime}$，$R_0^{(m)\prime\prime}$，$T_1^{(m)\prime\prime}$，$R_0^{(m)\prime\prime\prime}$，$T_1^{(m)\prime\prime\prime}$ はそれぞれ，

$$
(R_0^{(m)\prime})_{(kk-q)} = \eta^k \delta_{kk-q} I_{r^{(m)}}, \qquad (T_1^{(m)\prime})_{(kk-q)} = \hat{M}^{(m)[q]} U_{k\,k-q}^{(m)}, \tag{3.82}
$$

$$
(R_0^{(m)\prime\prime})_{(kk-q)} = \eta^k \delta_{kk-q} I_{n_k^{(m)\prime}}, \qquad (T_1^{(m)\prime\prime})_{(kk-q)} = -\frac{1}{3} I_{n_k^{(m)\prime}} \delta_{q\,0} + \frac{2}{3} \tilde{U}_{k\,k-q}^{(m)} \delta_{q\,\pm 2}, \tag{3.83}
$$

$$
(R_0^{(m)\prime\prime\prime})_{(kk-q)} = \eta^k \delta_{kk-q} I_{n_k^{(m)\prime\prime}}, \qquad (T_1^{(m)\prime\prime\prime})_{(kk-q)} = -\frac{1}{2} I_{n_k^{(m)\prime\prime}} \delta_{q\,0} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{U}_{k\,k-q}^{(m)} \delta_{q\,3}, \tag{3.84}
$$

と表せる。具体的に行列の形に書いたものは付録の式 (F.48)，(F.49)，(F.50)，(F.52)，(F.53)，(F.54) に示す。$\hat{M}^{(m)[1]}$ は正の成分を持つ対角行列，つまり $(\hat{M}^{(m)[1]})_{ii} > 0$ と表せるような行列であり，$\hat{M}^{(m)[2]}$ と $\hat{M}^{(m)[3]}$ は非負の成分を持つ対角行列，つまり $(\hat{M}^{(m)[2]})_{ii} \geq 0$ ならびに $(\hat{M}^{(m)[3]})_{ii} \geq 0$ と表せる行列である。また $\hat{M}^{(m)[-q]} = \hat{M}^{(m)[q]}$ である。$U_{k\,k-q}^{(m)}$ は $r^{(m)} \times r^{(m)}$ の

ユニタリ行列，$\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ と $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-3}$ はそれぞれ $n^{(m)\prime}_k \times n^{(m)\prime}_k$ および $n^{(m)\prime\prime}_k \times n^{(m)\prime\prime}_k$ のユニタリ行列である。$R^{(m)\prime\prime}_0$ と $T^{(m)\prime\prime}_1$ は $a^{(m)} = -1/3$ の場合にだけ現れ，$R^{(m)\prime\prime\prime}_0$ と $T^{(m)\prime\prime\prime}_1$ は $a^{(m)} = -1/2$ のときにだけ現れる。

適切なユニタリ変換により，$R^{(m)\prime}_0$，$R^{(m)\prime\prime}_0$，$R^{(m)\prime\prime\prime}_0$ を対角型に保ったまま，$T^{(m)\prime}_1$，$T^{(m)\prime\prime}_1$，$T^{(m)\prime\prime\prime}_1$ を，その部分行列の全てが対角型であるような行列に同時に変換することができる。具体的には式 (F.62)，(F.63)，(F.64) のような形になる。すると行と列の適切な並び替えにより，$R^{(m)}_0$ と $T^{(m)}_1$ は 6×6，3×3，2×2，1×1 の 4 種類の部分行列が対角型に並んだ簡潔なブロック対角型行列の形になる。具体的には例えば，6×6 行列 1 個と 1×1 行列 1 個が並んだ 7×7 行列だったり，2×2 行列 2 個と 1×1 行列 1 個が並んだ 5×5 行列だったりする。

ブロック対角型に書かれた $R^{(m)}_0$ と $T^{(m)}_1$ において 6×6 部分行列が存在する場合，それらの形は一般的に，式 (F.48) と (F.62) より，

$$r_0 = \begin{pmatrix} \eta & & & & & \\ & \eta^2 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -\eta & & \\ & & & & -\eta^2 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad t_1 = \begin{pmatrix} a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_6 & a_5 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_6 & a_5 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_6 \end{pmatrix}, \qquad (3.85)$$

と表すことができる。a_1，a_2，a_4，a_5 は複素数であり，a_3 は純虚数であり，a_6 は実数である。これらは互いに独立ではなく，$a_4 = \overline{a_2}$，$a_5 = -\overline{a_1}$，$2|a_1|^2+2|a_2|^2+|a_3|^2+a_6^2 = 1$，$|a_1|^2-|a_2|^2-|a_3|^2+a_6^2 = a_6$，$2a_2a_6+\overline{a_2}^2 = a_1^2-2\overline{a_1}a_3$，$a_1a_6+a_3\overline{a_2}+2a_2\overline{a_1} = a_1$，$-a_2a_6+a_1^2+\overline{a_1}a_3+\overline{a_2}^2 = a_2$，$-2a_3a_6+a_1a_2-\overline{a_1a_2} = a_3$ の関係がある。これらは境界条件 (3.76) をみたすために必要とされる。導出の詳細は省くが，式 (I.8) からも示唆されるように独立な要素の数は 2 つである。次節において，これらの 6×6 部分行列 r_0 と t_1 は適切なゲージ変換により同時に対角化できることが示される。

$a^{(m)} = -1/3$ の場合には，式 (F.49) および (F.63) より，$R^{(m)}_0$ と $T^{(m)}_1$ は以下のような 3×3 部分行列を対角ブロックに含む：

$$r'_0 = e^{2\pi n' i/6}\begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t'_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \qquad (3.86)$$

n' は整数であり，$\omega = \tau^2 = e^{2\pi i/3}$ は $T^2/\mathbb{Z}_3$ で使用したものと同じである。この t'_1 はゲージ変換によって対角化することができない。

$a^{(m)} = -1/2$ の場合には，式 (F.50) および (F.64) より，$R^{(m)}_0$ と $T^{(m)}_1$ は以下のような 2×2

部分行列を対角ブロックに含む。

$$r_0'' = e^{2\pi n'' i/6}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t_1'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{複号同順}), \tag{3.87}$$

n'' は整数である。これもまたゲージ変換によって対角化することができない。

$T^2/\mathbb{Z}_4$ の場合と同様に，式 (3.86) に示されたような 3×3 行列を 2 つ組み合わせたり，式 (3.87) に示されたような 2×2 行列を 3 つ組み合わせたりして 6×6 行列を作り，それを式 (3.85) と同様にゲージ変換で対角化できるという場合も存在する。前者は n' の値の異なる 3×3 行列を 2 つ組み合わせた場合，後者は n'' の値の異なる 2×2 行列を 3 つ組み合わせた場合である。しかしそのような組み合わせから漏れた残りの 3×3 行列や 2×2 行列は，対角化できない対角ブロック部分行列として残る。

$a^{(m)} = \pm 1$ の場合は，$R_0^{(m)}$ と $T_1^{(m)}$ は先述したように式 (3.81) の段階ですでに対角型であり，したがって 1×1 部分行列を対角ブロックとする行列と言える。

3.8　ゲージ変換による対角化

本節では，$T^2/\mathbb{Z}_2$ における 2×2 部分行列 t_1 と t_2，および $T^2/\mathbb{Z}_N$ $(N=3,4,6)$ における $N\times N$ 部分行列 t_1 が，それぞれ適切なゲージ変換によって，r_0 を対角型の形に保ったまま対角化されることを示す。

3.4 節での議論の結果から，$T^2/\mathbb{Z}_2$ における R_0，T_1，T_2 はそれぞれ以下の r_0，t_1，t_2 のような 2×2 ユニタリ行列を対角ブロックとするブロック対角型行列へと変換されるということが言える：

$$r_0 = X, \qquad t_1 = a_1 Y + a_2 I, \qquad t_2 = b_1 Y + b_2 I. \tag{3.88}$$

ここで X と Y は,

$$X \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.89}$$

で定義される行列であり（式 (3.51) と (3.52) を参照），$XY = -YX$ である。また a_i や b_i の具体的な値はブロックごとに異なりうるが，それはここでの議論には影響しない。行列 t_1 や t_2 の別の書き方として,

$$t_1 = e^{i\theta_{(1)} Y}, \qquad t_2 = e^{i\theta_{(2)} Y}, \tag{3.90}$$

というものもある。ここで $\theta_{(1)}$ や $\theta_{(2)}$ は実数であり，ブロックごとに異なりうる。$\theta_{(1)}$ と $\theta_{(2)}$ を用いると，a_1，a_2，b_1， b_2 はそれぞれ,

$$a_1 = i\sin\theta_{(1)}, \quad a_2 = \cos\theta_{(1)}, \quad b_1 = i\sin\theta_{(2)}, \quad b_2 = \cos\theta_{(2)}, \tag{3.91}$$

と表される。すると r_0，t_1，t_2 は，整数 $l_{(1)}$ と $l_{(2)}$ および式 (3.24) の τ を用いて

$$\Omega(z,\bar{z}) = e^{i\left(\beta z+\bar{\beta}\bar{z}\right)Y}, \quad \beta = \frac{-\theta_{(1)}+l_{(1)}\pi}{2}\left(1+\frac{\mathrm{Re}\,\tau}{\mathrm{Im}\,\tau}i\right) - \frac{-\theta_{(2)}+l_{(2)}\pi}{2}\frac{i}{\mathrm{Im}\,\tau}, \tag{3.92}$$

と書かれる $\Omega(z,\bar{z})$ を用いたゲージ変換,

$$\begin{aligned}
&\tilde{r}_0 = \Omega(-z,-\bar{z})r_0\Omega^\dagger(z,\bar{z}) = r_0, \qquad \tilde{t}_1 = \Omega(z+1,\bar{z}+1)t_1\Omega^\dagger(z,\bar{z}) = (-1)^{l_{(1)}}I, \\
&\tilde{t}_2 = \Omega(z+\tau,\bar{z}+\bar{\tau})t_2\Omega^\dagger(z,\bar{z}) = (-1)^{l_{(2)}}I,
\end{aligned} \tag{3.93}$$

によって対角化されることが分かる。

同様にして，$T^2/\mathbb{Z}_N$ $(N=3,4,6)$ における R_0 と T_1 は，次のような $N\times N$ ユニタリ行列を対角ブロックとするブロック対角型行列として書ける：

$$r_0 = X, \qquad t_1 = \sum_{p=1}^{N} a_p Y^p. \tag{3.94}$$

ここで X と Y は

$$X \equiv \begin{pmatrix} \tau & & & & \\ & \tau^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \tau^{N-1} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y \equiv \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}, \tag{3.95}$$

と定義される（式 (3.62)，(3.74)，(3.85) を参照)。また $\tau = e^{2\pi i/N}$ であり，a_p $(p=1,2,\cdots,N)$ は例えば $N=3$ であれば $a_1^3+a_2^3+a_3^3-3a_1a_2a_3=1$，$|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2=1$，$\overline{a_1}a_3+\overline{a_3}a_2+\overline{a_2}a_1=0$ といった関係を満たす数である。X と Y の間の交換関係は $XY=\tau^{-1}YX$ である。

a_p 間の関係は $\alpha_j \equiv \sum_{p=1}^{N} a_p\tau^{jp}$ を用いると簡略に

$$|\alpha_j|^2 = 1, \quad (j=1,\cdots,N), \qquad \text{for } N=3,4,6, \tag{3.96}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1, \qquad \text{for } N=3, \tag{3.97}$$

$$\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4 = 1, \qquad \text{for } N=4, \tag{3.98}$$

$$\alpha_1\alpha_4 = \alpha_2\alpha_5 = \alpha_3\alpha_6 = 1, \quad \alpha_1\alpha_3\alpha_5 = \alpha_2\alpha_4\alpha_6 = 1, \qquad \text{for } N=6, \tag{3.99}$$

と書ける。そしてこれらを駆使すると，t_1 は

$$t_1 = \sum_{p=1}^{N} a_p Y^p = e^{i\left(\theta Y+\bar{\theta}Y^{N-1}\right)}, \tag{3.100}$$

N	peculiar constraints	β	$\tilde{r}_0$	$\tilde{t}_1$
3	$t_1t_2t_3 = I$	$-\theta - \frac{2}{3}\pi\tilde{l}$	r_0	$\omega^{\tilde{l}}I$
4	$t_1t_2t_3t_4 = I,\ t_1t_3 = t_2t_4 = I$	$-\theta + \frac{1+i}{2}\pi\tilde{l}$	r_0	$(-1)^{\tilde{l}}I$
6	$t_1t_2t_3t_4t_5t_6 = I,\ t_1t_4 = t_2t_5 = t_3t_6 = I,\ t_1t_3t_5 = t_2t_4t_6 = I$	$-\theta$	r_0	I

Table 2: Peculiar constraints and gauge transformed matrices

と表せることが分かる。式 (3.96) – (3.100) の導出は付録 I に示す。

式 (3.100) に基づき，r_0 と t_1 に対して，

$$\tilde{r}_0 = \varOmega(\tau z, \bar{\tau}\,\bar{z}) r_0 \varOmega^\dagger(z,\bar{z}), \qquad \tilde{t}_1 = \varOmega(z+1, \bar{z}+1) t_1 \varOmega^\dagger(z,\bar{z}), \tag{3.101}$$

というゲージ変換を行うとする。このときゲージ変換の関数 $\varOmega(z,\bar{z})$ として

$$\varOmega(z,\bar{z}) = e^{i\left(\beta z Y + \bar{\beta}\bar{z} Y^{N-1}\right)} \tag{3.102}$$

を用い，その中の β としては $\tilde{l}$ を整数として Table 2 に掲載したものを用いると，$\tilde{r}_0$ と $\tilde{t}_1$ は同時に対角化される。それらが具体的にどのような行列になるのかも Table 2 に掲載した。

他方，$T^2/\mathbb{Z}_4$ での R_0 と T_1 には，対角ブロックとして

$$r'_0 = i^{n'} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (n' : \text{整数}), \tag{3.103}$$

という 2×2 行列が含まれうるのであった。この場合，r'_0 を対角型に保ちつつ t'_1 を対角化することはできない。

同様にして，$T^2/\mathbb{Z}_6$ の R_0 と T_1 には 3×3 行列

$$r'_0 = e^{2\pi n' i/6} \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t'_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad (n' : \text{整数}), \tag{3.104}$$

および 2×2 行列，

$$r''_0 = e^{2\pi n'' i/6} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t''_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{3.105}$$
$$(n'' : \text{整数，複合同順}),$$

が対角ブロックとして含まれ得たが，これらもゲージ変換によって同時対角化することはできない。具体的には，r'_0 を対角型に保ちつつ t'_1 を対角化したり，r''_0 を対角型に保ちつつ t''_1 を対

角化することができない。$T^2/\mathbb{Z}_4$ における式 (3.103) の行列も，$T^2/\mathbb{Z}_6$ における式 (3.104) および (3.105) の行列も，ひねり行列に対して要請されるすべての関係式を満たし，したがってひねり行列の対角ブロックを担う部分行列としての要件を満たしているが，対角化することはできない。

t'_1 や t''_1 を対角化するゲージ変換が存在しないことは，それらの部分に対応した連続的なウィルソンライン位相が存在しないということと関連付けて理解できる。ウィルソンライン位相は，例えば A_M $(M = 0, 1, 2, 3, 5, 6)$ の余剰次元成分 A_5 と A_6（添字を 4 と 5 でなく 5 と 6 とするのは慣例である）を $A_z = (A_5 - iA_6)/2$ および $A_{\bar{z}} = (\overline{A_z}) = (A_5 + iA_6)/2$ へと組み直し，これらの真空期待値 $\langle A_z \rangle$ と $\langle A_{\bar{z}} \rangle$ を用いて $\hat{W}_1 = e^{ig(\langle A_z \rangle + \langle A_{\bar{z}} \rangle)} T_1$ および $\hat{W}_2 = e^{ig(\tau \langle A_z \rangle + \bar{\tau} \langle A_{\bar{z}} \rangle)} T_2$ と表したものの固有値の位相部分として定義される。ここで $|\boldsymbol{\lambda}_1| = 1$ とおかれていることを用いた。連続的なウィルソンライン位相とは，$\langle A_z \rangle$ と $\langle A_{\bar{z}} \rangle$ が（変数として）関係する位相を指す。他方，$\langle A_z \rangle$ が常にゼロであり，そのため $\hat{W}$ が常に T_1 や T_2 のようなひねり行列と等値なものとして固定されているとき，そのような $\hat{W}$ の固有値の位相は「離散的なウィルソンライン位相」と呼ばれる。そこで $T^2/\mathbb{Z}_N$ における $\langle A_z \rangle$ を見てみると，$\langle A_z \rangle$ は $\mathbb{Z}_N$ 回転のもとで

$$R_0 \langle A_z \rangle R_0^{-1} = \tau \langle A_z \rangle, \tag{3.106}$$

と変換されなければならない。これは R_0 がどのような行列で表されようと $\mathbb{Z}_N$ 回転に対応した行列である限りは必ず成立する式である。しかしこの関係式を満たす $\langle A_z \rangle$ がゼロ以外に存在しない。行列 $\langle A_z \rangle$ の中で式 (3.103) や (3.104) の r'_0，および式 (3.105) の r''_0 に対応する部分については，この関係式を満たすものがゼロ以外に存在しない。したがって例えば行列 $\hat{W}_1 = e^{ig(\langle A_z \rangle + \langle A_{\bar{z}} \rangle)} T_1$ の中で t'_1 に対応する部分 $\hat{w}'_1$ は恒常的に $\hat{w}'_1 = t'_1$ となり，$\hat{w}'_1$ の固有値は t'_1 の固有値 $\{1, -1\}$ に固定される。言い換えれば，そこに対応するウィルソンライン位相 $\{\theta_j\}_{w'_1}$ は $\{1, -1\} = \{e^{2\pi i}, e^{\pi i}\}$ の位相部分 $\{0, \pi\} \pmod{2\pi}$ に固定され，それ以外の値を取り得ない定数となる。このような場合,「連続的なウィルソンライン位相（の自由度）が存在しない」と言われる。他方，式 (3.102) のゲージ変換で R_0 を対角型に保ちつつ T_1 を対角化するとき，行列 βY を Θ とすると，

$$R_0 \to e^{i\left(\tau z \Theta + \bar{\tau} \bar{z} \bar{\Theta}\right)} R_0 e^{-i\left(z \Theta + \bar{z} \bar{\Theta}\right)} = R_0, \tag{3.107}$$

を満たすような Θ の中から，

$$T_1 \to e^{i\left((z+1)\Theta + (\bar{z}+1)\bar{\Theta}\right)} T_1 e^{-i\left(z\Theta + \bar{z}\bar{\Theta}\right)} \tag{3.108}$$

を対角にするものを探す，ということになる。式 (3.107) は整理すると，

$$R_0 \Theta R_0^{-1} = \tau \Theta, \tag{3.109}$$

となる。これは式 (3.106) と同じ形をしている。そしてやはり行列 Θ の中で式 (3.103) や (3.104) の r_0'，および式 (3.105) の r_0'' に対応する部分については $\Theta = 0$ 以外に解がない。したがって式 (3.108) の中で t_1' や t_1'' に対応する部分については，$t_1' \to t_1'$ や $t_1'' \to t_1''$ とならざるを得ず，違う形に変換することが出来ない。まとめると，式 (3.106) と (3.109) から分かるように $\langle A_z \rangle$ と Θ とは連動しており，そして $\langle A_z \rangle$ の自由度が存在しないことは連続的なウィルソンライン位相の自由度が存在しないことと対応している。したがって t_1'，t_1'' を対角化する Θ の自由度が存在しないことは，連続的なウィルソンライン位相の自由度が存在しないことと対応している。

3.9 物理的意味の考察

3.9.1 ゲージ群の階数の減少による対称性の破れ

今回の結果を通じて明確になってきた議論として，ゲージ群における階数の減少（ランク落ち；rank reduction）との関わりを挙げることができる。

一般に高次元模型における 4 次元有効理論での物理的な対称性はウィルソンライン位相の動力学的過程（dynamics）と場の境界条件とによって，細谷機構と呼ばれるプロセスを通じて決定される [29, 30, 31]。具体的な定式化のひとつは以下のようなものである。ひねり行列の組（$T^2/\mathbb{Z}_N$ の場合は (R_0, T_1, T_2)）によって境界条件が与えられると各場のカルツァ・クライン展開が決まるとともに，ウィルソンライン位相についての有効ポテンシャル $V_{\rm eff}$ を計算することができる。$V_{\rm eff}$ の最小値は A_z の真空期待値 $\langle A_z \rangle$ において得られる。この $\langle A_z \rangle$ と上述のカルツァ・クライン展開によって物理的な対称性が決定される。どのような対称性が実現されるかについては，次の洗練された計算法が確立されている。$\Omega(z, \bar{z}) = e^{ig(\langle A_z \rangle z + \langle A_{\bar{z}} \rangle \bar{z})}$ によるゲージ変換を行うと $\langle A_z \rangle$ が $\langle A_z' \rangle = 0$ へと変換されるが，この時ひねり行列は，

$$\begin{aligned}
&(R_0, T_1, T_2) \to (R_0^{\rm sym}, T_1^{\rm sym}, T_2^{\rm sym}) \\
&= (\Omega(\tau z, \bar{\tau}\bar{z}) R_0 \Omega^\dagger(z, \bar{z}), \Omega(z+1, \bar{z}+1) T_1 \Omega^\dagger(z, \bar{z}), \Omega(z+\tau, \bar{z}+\bar{\tau}) T_2 \Omega^\dagger(z, \bar{z})), \qquad (3.110)
\end{aligned}$$

へと変換される。すると物理的なゲージ対称性は $(R_0^{\rm sym}, T_1^{\rm sym}, T_2^{\rm sym})$ と交換する生成子 T^a によって与えられること，すなわち，

$$\mathcal{H}^{\rm sym} = \Big\{ T^a; [T^a, R_0^{\rm sym}] = [T^a, T_1^{\rm sym}] = [T^a, T_2^{\rm sym}] = 0 \Big\}, \qquad (3.111)$$

なる T^a の集合 $\mathcal{H}^{\rm sym}$ で与えられることが分かっている。

さて，このときゲージ群の階数は $R_0^{\rm sym}$ および $T_m^{\rm sym}$ と交換するカルタン部分環（Cartan subalgebra）の元の数（互いに交換する T_a の数）と一致することになる。したがって $R_0^{\rm sym}$ と

$T_m^{\rm sym}$ が対角型である場合には階数の減少は起こらない。階数の減少が起こらないということは，対称性の破れも起こらない可能性があるということである。ただし可能性であって必ず破れないということではない。階数の減少を伴わない対称性の破れ（例えば $SU(3) \to SU(2) \times U(1)$ など）もあるからである。しかし少なくとも階数の減少は起こらない。言い換えれば，ウィルソンライン位相の真空期待値のパラメータ空間において一般の点では階数の減少が起こるが，対角型の R_0 と T_m が同値類に含まれるときは，そのような対角型の R_0 と T_m を $R_0^{\rm sym}$ および $T_m^{\rm sym}$ として実現するような点（つまり $\langle A_z \rangle$ をゼロにすると同時に R_0 と T_m を対角化するようなゲージ変換が存在する点）が，他の点に比べて対称性の高い点（symmetry-enhanced points）として存在する，とも言える。

それとは対照的に，$T^2/\mathbb{Z}_4$ において t_1' が存在する場合や $T^2/\mathbb{Z}_6$ において t_1' や t_1'' が存在する場合には，必ず階数の減少が生じる。それらは離散的な値（式 (3.103)，(3.104)，(3.105) に書かれているものに比例した値）をとり，対角化しえないからである。その中で 2×2 の行列すなわち式 (3.103) における t_1' および式 (3.105) における t_1'' は式 (3.90) に含まれていることに注意されたい。同様に 3×3 行列すなわち式 (3.104) における t_1' のほうは式 (3.94) に含まれている。それらはそれぞれ $\mathbb{Z}_2$ オービフォルドおよび $\mathbb{Z}_3$ オービフォルドではゲージ変換で対角化されたのであった。また式 (3.106) を満たすような $\langle A_z \rangle$ が連続量となり，したがってそれをゼロに変換するゲージ変換と行列 t_1 を対角化するゲージ変換とが一致するという可能性があった。しばしば用いられる言語表現で言えば,「ウィルソンライン位相の自由度を用いて」行列 t_1 が対角化されるという可能性があった。そして上の段落で述べたように階数の減少が生じない可能性があった。しかしその自由度は $\mathbb{Z}_4$ や $\mathbb{Z}_6$ オービフォルドでは，群が拡大されたことによって入ってきた新しい要素（たとえば $R_0^2 = I$ から $R_0^4 = I$ へと変わったことにより，R_0 の対角要素として虚数 i が入ってきうるようになったことなど）のために制限（project out）されてしまった。$\langle A_z \rangle$ を行列で表現した時にその中で t_1' や t_1'' に対応する部分は $T^2/\mathbb{Z}_4$ や $T^2/\mathbb{Z}_6$ では常にゼロであり，したがってそこをゼロに変換するゲージ変換というものは（$\Omega = 1$ という恒等変換以外には）存在しないから，ゲージ変換に伴い t_1' や t_1'' が対角化されるという可能性も存在しない。つまり階数が減少しないという可能性が存在しない。先述した「連続的／離散的ウィルソンライン位相」という用語を用いて言えば，t_1' や t_1'' は $T^2/\mathbb{Z}_4$ や $T^2/\mathbb{Z}_6$ では離散的ウィルソンライン位相（であるような部分）になる，ということである。そして「$T^2/\mathbb{Z}_4$ や $T^2/\mathbb{Z}_6$ で t_1' や t_1'' が存在する場合，そこが離散的ウィルソンライン位相（であるような部分）になって階数の減少がどのような真空でも必ず生じる」ということになる。

整理すると，同じ 2×2 部分行列や 3×3 部分行列でも，それが $T^2/\mathbb{Z}_2$ や $T^2/\mathbb{Z}_3$ で現れた

ときには連続的ウィルソンライン位相を成し，対角化されて階数の減少を生じない可能性があったのだが，$T^2/\mathbb{Z}_4$ や $T^2/\mathbb{Z}_6$ で部分群の要素として現れたときには離散的ウィルソンライン位相になり，必ず階数の減少を生じる，ということになる。このことは，$\mathbb{Z}_N$ オービフォルドにおいて N が素数でないときには，部分行列 t'_1 および／または t''_1 の存在による階数の減少が，どのような真空でも必ず生じるという場合がありうることを示唆している。

文献 [48, 49] では，オービフォルドが形成されるときのゲージ群の階数の減少について調べられている。そこでは離散的ウィルソンライン位相による階数の減少は無いということが指摘された。これは上に述べたことと異なる。しかしそれらの研究ではほぼ $\mathbb{Z}_2$ オービフォルドのみを対象として議論が行われている。つまり上の段落の記述でいえば $\mathbb{Z}_N$ オービフォルドにおいて N が素数の場合を議論の対象としている。回転操作 R_0 と交換しない離散的ウィルソンライン位相の可能性，つまり式 (3.103) の t'_1，(3.104) の t'_1，(3.105) の t''_1 の可能性については調べられていない。本研究の結果は彼らの結果がすべての $\mathbb{Z}_N$ オービフォルドに一般化できるものではないことを示すものである。

3.9.2 具体例

ここでは $T^2/\mathbb{Z}_4$ の場合を例にとって具体的な境界条件を 3 つ挙げる。

まず 1 つ目の例として，6 次元で $SU(6)$ の対称性をもつ理論であって余剰次元が $T^2/\mathbb{Z}_4$ オービフォルドを形成し，その境界条件に対応するひねり行列が，

$$R_0 = \begin{pmatrix} -1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& 1 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& -1 && \\ &&&& -1 & \\ &&&&& -1 \end{pmatrix}, \tag{3.112}$$

のように対角型に表示されるものを考える。3.6 節の言葉で言えば，これは両行列がすべて 1×1 行列からなるものの例である。

この境界条件によって 4 次元有効理論においては対称性の破れが生じ，$SU(6)$ 対称性は $SU(3)\times SU(2)\times U(1)^2$ へと破れる。余剰次元が 2 次元でなく 1 次元であり $T^2/\mathbb{Z}_4$ でなく $S^1/\mathbb{Z}_2$ であるという場合にこの境界条件が課せられているのであったら，連続的なウィルソンライン位相の自由度によって $SU(2)\times U(1)$ の部分左上の $\mathrm{diag}(-1,1,1)$ の部分はさらに $SU(2)\times U(1)\to U(1)$ へと破れうる。これは実際に電弱対称性の破れを模するものとして使われうる [16, 17]。しかし今考えている $T^2/\mathbb{Z}_4$ のケースでは，その部分に対応する連続的なウィルソンライン位相

の自由度がなく，したがって階数の減少は起こらない。つまりその $SU(2)\times U(1)$ の部分がさらに $SU(2)\times U(1) \to U(1)$ へと破れることはない。少し具体的に述べると，この R_0 を式 (3.106) に代入し，$T^2/\mathbb{Z}_4$ なので $\tau = e^{2\pi i/4} = i$ を代入すると，解として得られる $\langle A_z \rangle$ のうち，R_0 の左上の $\mathrm{diag}(-1,1,1)$ に対応する部分については，零行列以外に解がない。したがって，そこを零にするゲージ変換というものが恒等変換以外には存在せず，それに伴って R_0 や T_1 のほうでそこに対応する部分が非対角型に変換されて階数が下がる，という可能性が存在しない。

次に，$T^2/\mathbb{Z}_4$ の場合においてウィルソンライン位相の自由度が対称性の破れを起こす場合を見るために，上の一番目の例を少し改変して，$SU(8)$ 対称性（階数は 7）をもつ理論において境界条件が次のようなひねり行列，

$$R_0 = \begin{pmatrix} i &&&&&&& \\ & -1 &&&&&& \\ && -i &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&&&& 1 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& -1 & \\ &&&&&&& -1 \end{pmatrix}, \tag{3.113}$$

を持つ場合を考える。3.6 節の言葉で言えば，これは両行列が 1 個の 4×4 部分行列（左上の部分行列）と 4 個の 1×1 部分行列からなる形になっている場合である。T_1 の側の 4×4 部分行列は Table 2 の $N=4$ の行において $\tilde{l}$ を偶数としたものとなっている。

この境界条件の元で $SU(8)$ 対称性は 4 次元有効理論においては $SU(3)\times SU(2)\times U(1)^4$（階数は 7）に破れる。そしてさらにウィルソンライン位相の自由度が存在する結果，$\langle A_z \rangle$ をゼロにするようなゲージ変換に伴い T_1 の左上の 4×4 行列は一般には式 (3.74) で表されるような必ずしも対角型でない形へと変換される。非対角型へと変換された場合，その 4×4 行列のブロックとその下のもうひとつの 1×1 行列のブロックとを合わせた 5×5 行列に対応していた対称性が破れ，$SU(2)\times U(1)^3 \to U(1)$ となる。これもまた電弱対称性の破れを模するものとして用いられうる。先述した第一の例と異なり，こちらの第二の例は，$T^2/\mathbb{Z}_4$ における連続的なウィルソンライン位相によって階数の減少が起こりうる例となっている。上述の $SU(2)\times U(1)^3 \to U(1)$ という対称性の破れに伴い，その部分の階数は 4 から 1 へと下がり，したがって全体の階数も 7 から 4 へと下がる。

次に挙げる第三の例は，連続的なウィルソンライン位相の関与なしに階数の減少が起こる

例である。$SU(7)$ 対称性をもつ理論（階数は 6）において境界条件が次のようなひねり行列，

$$R_0 = \left(\begin{array}{cc|ccccc} -1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ \hline & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right), \qquad T_1 = \left(\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ \hline & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & -1 \end{array}\right), \tag{3.114}$$

で書かれる場合を考える。3.6 節の言葉で言えば，これは左上に 2×2 部分行列，その右下に 5 つの 1×1 部分行列を並べたものである。そしてそこで述べたように，$T^2/\mathbb{Z}_4$ における 2×2 の対角ブロックは対角行列にすることができない。

このとき $SU(7)$ 対称性は $SU(3)\times SU(2)\times U(1)^2$（階数は 5）へと破れる。そしてそれは，左上の 2×2 部分行列が対角型でないことによって生じる階数の減少を伴っている。これは先述した第二の例とは異なり，連続的なウィルソンライン位相の自由度によらずに階数の減少が起こる例となっている。

4　まとめと考察

本研究ではオービフォルド $T^2/\mathbb{Z}_N$ $(N = 2, 3, 4, 6)$ 上にコンパクト化された $SU(n)$ もしくは $U(n)$ ゲージ理論について，そのひねり行列の組の同値類の中に必ず対角型のものが存在するかどうかを調べた。より具体的には，各オービフォルド条件においてひねり行列の組に課せられる制約条件を活用し，適切なユニタリ変換およびゲージ変換によってすべてのひねり行列を同時対角化することができるかどうかを調べた。結果として $T^2/\mathbb{Z}_2$ と $T^2/\mathbb{Z}_3$ については，全ての行列が対角型であるようなひねり行列の組が各同値類ごとに少なくともひとつ存在する，ということが示されたが，$T^2/\mathbb{Z}_4$ と $T^2/\mathbb{Z}_6$ についてはそれは示されなかった。$T^2/\mathbb{Z}_4$ と $T^2/\mathbb{Z}_6$ の場合でもブロック対角化まではでき，そして対角ブロックの一部は前者の場合は 4×4 の行列，後者の場合は 6×6 の行列になって，これらはゲージ変換により対角化できる。しかしそれら以外に，$T^2/\mathbb{Z}_4$ の場合には 2×2 行列（式 (3.103) における t'_1），$T^2/\mathbb{Z}_6$ の場合には 3×3 または 2×2 行列の部分行列（式 (3.104) における t'_1 および式 (3.105) における t''_1) が対角ブロックに含まれる可能性があり，それらの部分は対角化できない。

t'_1 や t''_1 を対角化するゲージ変換が存在しないことは，それらを含んだブロック対角型の表示に対応した連続的ウィルソンライン位相が存在しないことと関連している。3.9.1 節で述べたように，連続的ウィルソンライン位相のパラメータ空間において一般の点では階数の減少が生じるが，R_0 と T_m が対角型でありうる場合，特殊な点として対称性が促進される点も存在する。それとは対照的に，$T^2/\mathbb{Z}_4$ で t'_1 が存在する場合や $T^2/\mathbb{Z}_6$ で t'_1，t''_1 が存在する場合は，必ず階数の減少が生じる（3.9.2 節の第三の例参照)。それらの部分行列は離散的な値を持つものであること，そして本研究の結果は Z_N オービフォルドで N が素数でない場合には離散的ウィルソンライン位相によって階数の減少を伴った対称性の破れが起こる例を示すことになったこと，が注目される。

本研究では $T^2/\mathbb{Z}_4$ と $T^2/\mathbb{Z}_6$ のひねり行列において一般には対角化できないブロックが存在しうることが示された。ひねり行列が対角化できないということが持ちうる意味のひとつは，一般にひねり行列が対角型でないとゲージ場 $A_M = \sum_a A^a_\mu T^a$（T^a はゲージ群の生成子）の各成分 A^a_μ や，フェルミオンの基本表現や随伴表現の各成分に対する境界条件が，複数の成分が絡み合ったものになり，カルツァ・クライン展開を求めるのが困難になることである。そのため有効ポテンシャルの計算も難しくなる。仮にひねり行列の $N\times N$ の成分がすべてゼロでない値を持ったら，例えば A^a_μ の境界条件は N^2-1 個の A^a_μ $(a = 1, \ldots, N^2-1)$ がすべて絡み合った方程式となって，各 A^a_μ のモード展開を求めるのは困難に見える。しかし今回の計算の

結果 $T^2/\mathbb{Z}_4$ では，対角化できない場合があるといってもブロック対角化までは持っていくことができ，しかも対角ブロックの中に式 (3.103) で t'_1 として示した 2×2 の非対角行列が含まれるだけのことであることが示された。そして t'_1 の形を見ると，ここに対応するゲージ場やフェルミオン場の成分は 2 章の式 (2.135) において $A^1_y(x,y)$ や $A^5_y(x,y)$ のモード展開を求めたときと同様にして求められることが分かる。したがって，対角化できないとはいっても，多くの計算にとっては十分に簡潔な形になると思われる。他方，$T^2/\mathbb{Z}_6$ のほうでは，非対角ブロックとして現れる 3×3 行列の t'_1（式 (3.104) 参照）や 2×2 行列の t''_1（式 (3.105) 参照）が，それぞれ 9 個および 4 個の行列要素のうちゼロであるものがひとつもないという形になっている。ここではモード展開を求めるのは容易ではないように見える。それらの場合にも必ずモード展開を導出できるような方法があるかどうかは現在調査中である。

本稿ではゲージ群を $SU(n)$ もしくは $U(n)$ に限定した。それは今回行った計算において各部分行列を対角化するユニタリ変換が対称性変換（対称性を保つ変換）の一部であることを保証するためである。より一般的なゲージ群への拡張は今後の重要な課題のひとつである。さらに，年来の問題である「任意性問題」もまだ残されている。「任意性問題」とは，実験と観測から得られる現象論的情報に依存せずに境界条件を設定することはできるか，という問題である。現状では，例えば模型の予測が現象論的に観測されているデータと合うように，あるいはその都度の理論的動機にとって都合のよいように，研究者が任意に境界条件を設定している。そうではなく，場の境界条件を理論的に決定する原理や機構を見つけることができるか，という課題は，現在もなお挑戦的な課題となっている。

謝辞

主指導教員の川村嘉春先生には私の修士２年の折から４年半にわたり，とても暖かく丁寧に指導をしていただきました。今回の博士論文の準備に関しましても大変お世話になりました。厚く御礼申し上げます。また信州大学素粒子論研究室の小竹悟先生と奥山和美先生にもとてもお世話になりました。これら３名の先生方には物理学の勉強だけでなく，研究室での日常においても大変お世話になりました。学問以外でも興味深いお話等を色々聞かせていただきました。とても思い出深い物理学大学院生活でした。重ねて御礼申し上げます。原著論文の共著者である九州大学の小島健太郎先生と愛知医科大学の山下敏史先生は，未熟な私を共同研究者として暖かく迎え入れてくださり，また学会や研究会での発表につきましても，貴重なお時間を割いて有益なアドバイスをくださいました。厚く御礼申し上げます。副指導教員をお引き受けくださった信州大学数学科の佐々木格先生，学位審査の外部審査委員をお引き受けくださった大阪公立大学の波場直之先生にも厚く御礼申し上げます。

A カルツァ・クライン質量の計算のより完全な記述

2.1.2 節と 2.1.3 節では議論の単純化のため $A_y(x,y)$ が定数をとったとして各場のカルツァ・クライン質量の計算を紹介した。そして $A_y(x,y)$ が定数をとるということは $A_y(x,y)$ が真空期待値をとることであるとして，真空期待値と結びつけた。より完全な記述としては，少し議論が複雑になるが，$A_y(x,y)$ についても他の場と同様にカルツァ・クライン展開を考え，その各モードがどうなるのかを丁寧に見ながら記述するのが自然である。以下にその概要を述べる。

2.1.2 節で述べた $U(1)$ ゲージ理論を再び考える。関連する数式を再掲すると次のようになる。まずラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\left(D_M\Phi\right)^\dagger D^M\Phi - \frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}, \tag{A.1}$$

で与えられるものとする。そして作用は $y \sim y + 2\pi R$ の条件によって

$$\tilde{S} = \int d^4x \int_0^{2\pi R} \left\{ -\left(D_M\Phi\right)^\dagger D^M\Phi - \frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} \right\}, \tag{A.2}$$

で与えられるとする。そして $\Phi(x,y)$ と $A_M(x,y)$ に対する境界条件を

$$\Phi(x, y+2\pi R) = \Phi(x,y), \tag{A.3}$$

$$A_M(x, y+2\pi R) = A_M(x,y), \tag{A.4}$$

であると設定すると，$\Phi(x,y)$ と $A_M(x,y)$ は，

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi^{(n)}(x)\, e^{i\frac{n}{R}y}, \tag{A.5}$$

$$A_M(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_M^{(n)}(x)\, e^{i\frac{n}{R}y}, \tag{A.6}$$

とカルツァ・クライン展開される。2.1.2 節では $A_y(x,y)$ については定数 $A_y(x,y) = \theta_H/(2\pi gR)$ がとられたとし，$A_\mu(x,y)$ についてだけ上記のカルツァ・クライン展開を用いた。ここでは $A_y(x,y)$ についても式 (A.3) を用いる。それらを作用 (A.2) に代入すると，

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_\Phi(x) + \mathcal{L}_A(x) \right\}, \\
\mathcal{L}_\Phi(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -\left(D_\mu\Phi^{(n)}\right)^\dagger D^\mu\Phi^{(n)} + \frac{n^2}{R^2}\Phi^{(n)\dagger}\Phi^{(n)} \right. \\
&\qquad \left. -2\frac{n}{R}gA_y^{(0)}\Phi^{(n)\dagger}\Phi^{(n)} + g^2A_y^{(0)}A_y^{(0)}\Phi^{(n)\dagger}\Phi^{(n)} \right\}
\end{aligned}$$

$$
+\sum_{\substack{n-m+l=0,\\ l\neq 0}}\left\{-2\frac{n}{R}gA_y^{(l)}\Phi^{(n)\dagger}\Phi^{(m)}\right\}+\sum_{\substack{n-m+l+l'=0,\\ l,l'\neq 0}}g^2A_y^{(l)}A^{y(l')}\Phi^{(n)\dagger}\Phi^{(m)},
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_A(x) &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(0)}F^{(0)\mu\nu}-\frac{1}{2}\partial_\mu A_y^{(0)}\partial^\mu A_y^{(0)} \\
&\quad +\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(n)}F^{(n)\mu\nu}-\frac{1}{2}\frac{n^2}{R^2}\left(A_\mu^{(n)}-\frac{R}{n}\partial_\mu A_y^{(n)}\right)\left(A^{(n)\mu}-\frac{R}{n}\partial^\mu A_y^{(n)}\right)\right\},
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

のように書けるものになる。ここで $\Phi^{(n)}(x)$ を $\Phi^{(n)}$，$A_M^{(n)}(x)$ を $A_M^{(n)}$ のように略記した。$\Phi^{(n)}(x)$ の n は $-\infty\leq n\leq\infty$，$A_M^{(n)}(x)$ の n は $0\leq n\leq\infty$ の範囲をとる。$A_M^{(n)}(x)$ のほうで $0\leq n\leq\infty$ とするのは，式 (2.24) の下でも部分的に述べたように，$A_M(x,y)$ が実数であることを要請すると $A_M^{(n)}(x)=A_M^{(-n)}(x)$ となるためである。その上で $\mathcal{L}_\Phi(x)$ の第 3 項の和は，$n-m+l=0$ かつ $l\neq 0$ を満たすような n,m,l の組み合わせで和をとることを意味する。第 4 項も同様である。

まず $\mathcal{L}_\Phi(x)$ に着目する。$\mathcal{L}_\Phi(x)$ の第 3 項と第 4 項は $A_y^{(0)}(x)$ と $\Phi^{(n)}(x)$ との相互作用項となっている。しかしここで $A_y^{(0)}(x)$ が真空期待値 $\langle A_y^{(0)}\rangle$ をとり，$\langle A_y^{(0)}\rangle$ とそのまわりのゆらぎ $A_y^{(0)q}(x)$ によって $A_y^{(0)}(x)=\langle A_y^{(0)}\rangle+A_y^{(0)q}(x)$ と表せるようなものになると，$A_y^{(0)}(x)$ を $\langle A_y^{(0)}\rangle$ で置き換えた項が出てきてこれが $\Phi^{(n)}(x)$ の質量項を成す。具体的に $\langle A_y^{(0)}\rangle$ が $\langle A_y^{(0)}\rangle=\theta_H/(2\pi gR)$ という値をとれば，$\Phi^{(n)}(x)$ の質量 m_n は $\mathcal{L}_\Phi(x)$ の第 2 項と合わせて $m_n^2=(n-\theta_h/2\pi)^2/R^2$ のように求まり，2.1.2 節で述べたものと一致する。2.1.2 節での計算は $\Phi^{(n)}(x)$ の質量生成に関するこの本質的部分を抽出したものと言える。

次に $\mathcal{L}_A(x)$ に着目する。ここで注目されるのは第 2 項および和の項（第 3 項および第 4 項）である。第 2 項は質量ゼロのスカラー場 $A_y^{(0)}$ の運動項であり，和の項は

$$
B_\mu^{(n)}\equiv A_\mu^{(n)}-\frac{R}{n}\partial_\mu A_y^{(n)},
\tag{A.8}
$$

で定義される，質量 n/R をもったベクトル場 $B_\mu^{(n)}$ のラグランジアンという体裁をなしている。和の中の $F_{\mu\nu}^{(n)}$ は $F_{\mu\nu}^{(n)}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ であるが，

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu \\
&=\partial_\mu(A_\nu^{(n)}-\frac{R}{n}\partial_\nu A_y^{(n)})-\partial_\nu(A_\mu^{(n)}-\frac{R}{n}\partial_\mu A_y^{(n)}) \\
&=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu,
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

なので，$F_{\mu\nu}^{(n)}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu$ でもある。するとこれは，ヒッグス機構においてヒッグス場の位相部分 $\varphi(x)$ とゲージ場 $A_\mu(x)$ との組み合わせで定義されるベクトル場が質量を持つようになるのと同じ構造をしている。ここでは $A_y^{(n)}(x)$ が $\varphi(x)$ の働きをしている。ヒッグス機構ではし

ばしば「ゲージ場（自由度2）がボソン場 $\varphi(x)$（南部ゴールドストンボソンとして出現し得た場）の自由度（1）を取り込んで自由度3の場となり，質量を得た」などと表現されることがあるが，ここでもそれと同じ構造が見られる。ゲージ場 $A_\mu^{(n)}(x)$（自由度2）が，零質量のスカラー場 $A_y^{(n)}(x)$ の自由度（1）をとりこんで自由度3の場となり，質量を得た，という形になっている。したがって $U(1)$ ゲージ理論の次元簡約において $n \neq 0$ の $A_\mu^{(n)}(x)$ が質量 n/R を持つというのは，「$A_\mu^{(n)}(x)$ が $A_y(x,y)$ の n 次のモード $A_y^{(n)}(x)$ を取り込んで質量を得たものである」と理解することもでき，これはヒッグス機構と類似している。なおヒッグス機構における $\varphi(x)$ はヒッグス場のポテンシャルの $SO(2)$ 対称性が破れたことに伴う南部・ゴールドストンボソン（として現れ得た場。いわゆる would-be Nambu-Goldstone boson）であるが，$A_y^{(n)}(x)$ は5次元ゲージ場 $A_M(x,y) = \sum A_M^{(n)}(x)e^{iny/R}$ の各 n の項が持っていた5次元時空回転対称性（5次元ローレンツ対称性）が $A_\mu^{(n)}(x)$ の4次元時空回転対称性（4次元ローレンツ対称性）に破れたことに伴う各 n ごとの南部・ゴールドストンボソン（として現れ得た場）と考えられる。

$SU(N)$ ゲージ理論になると細谷機構が働いて $\langle A_y^{(0)}\rangle$ の成分も寄与してくるようになり，それもまた興味深いものではあるが，その構造の完全な記述は複雑であり，本論文の主題に関わるものではないので割愛する。簡易的には2.1.3節の終盤に述べたように記述できる。ただし，2章で紹介した知識からすぐに言えることとして，まず，細谷機構にとって重要なウィルソンライン位相に寄与するのは $A_y^{(0)}(x)$ のみである。それは

$$
\begin{aligned}
\hat{W}(x) &= P\exp\left\{-ig\int_0^{2\pi R} dy A_y(x,y)\right\}U \\
&= P\exp\left\{-ig\int_0^{2\pi R} dy \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_y^{(n)}(x)\, e^{i\frac{n}{R}y}\right\}U \\
&= P\exp\left\{-ig\int_0^{2\pi R} dy A_y^{(0)}(x)\right\}U, \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}
$$

から分かる。したがって細谷機構に寄与するのは $\langle A_y^{(0)}\rangle$ のみである。次に，この $\hat{W}$ の固有値から求められるウィルソンライン位相 $\{\theta_j\}$ はゲージ不変であるが，$\langle A_y^{(0)}\rangle$ はゲージ変換によってゼロに変換されうるものである。$U = I$ のとき $\langle A_y^{(0)}\rangle$ はウィルソンライン位相 $\{\theta_j\}$ を用いて $\langle A_y^{(0)}\rangle = \frac{1}{2\pi g R}\mathrm{diag}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$（式(2.35)参照）のように書かれうるが，これは $\langle A_y^{(0)}\rangle$ が不変であることを意味するものではない。適切なゲージ変換によってその $\langle A_y^{(0)}\rangle$ はすぐにゼロにすることができる。しかしそのゲージ変換は $\{\theta_j\}$ の値を含むものとなるので，そのゲージ変換によって同時に $U = I$ が変換されるときに，$\{\theta_j\}$ の値は U の中に入ってくる。そしてその U を用いてウィルソンライン位相を計算すると，やはり $\{\theta_j\}$ となる。ここから言えるのは，$SU(N)$ 模型で細谷機構によって対称性の破れが起きるとき，言い換えれば $A_\mu^{(0)}$ や $A_\mu^{(n)}$ が

質量をもつとき，そこには $\langle A_y^{(0)} \rangle$ だけでなくひねり行列 U の内容も関与してくるということである。

$\mathcal{L}_A(x)$ の第 2 項は，$A_y^{(0)}(x)$ が真空期待値 $\langle A_y^{(0)} \rangle$ をとった場合も依然として残る。$A_y^{(0)}(x)$ が $\langle A_y^{(0)} \rangle$ とそのまわりのゆらぎ $A_y^{(0)q}(x)$ によって $A_y^{(0)}(x) = \langle A_y^{(0)} \rangle + A_y^{(0)q}(x)$ と表されたとき，この項は $A_y^{(0)}(x)$ を $A_y^{(0)q}(x)$ に置き換えただけのものとして残る。したがってこの模型では，4 次元有効理論に質量ゼロのスカラー場 $A_y^{(0)q}(x)$ が現れることになる。しかし 2.2.1 節で見るように，余剰次元をオービフォルドにするとこの $A_y^{(0)q}(x)$ は消え得る。模型によっては，それもまた余剰次元をオービフォルドにすることの利点であるかもしれない。

B　ひねり行列が非対角型であるときの $A_M^a(x,y)$ のカルツァ・クライン展開の一例

ここでは $S^1/\mathbb{Z}_2$ の $SU(3)$ ゲージ理論において，ひねり行列の組が式 (2.128)，すなわち

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.1}$$

で与えられた場合の，$A_M(x,y) = \sum_{a=1}^{8} A_M^a(x,y) T^a$ の成分 $A_M^a(x,y)$ のカルツァ・クライン展開について例を示す。ここで T^a $(a = 1, \dots, 8)$ は $SU(3)$ の生成子である。ここに述べる導出の過程は，他の場合のカルツァ・クライン展開を求める際にも参考になると期待される。[6]

$A_y^1(x,y)$ と $A_y^5(x,y)$ の場合を例にとる。式 (B.1) のようにひねり行列が与えられたとき，$A_y^1(x,y)$ と $A_y^5(x,y)$ の境界条件は相互に依存しあう形になり，それぞれ式 (2.133) および式 (2.134)，すなわち

$$\begin{aligned} A_y^1(x,-y) &= A_y^1(x,y), \\ A_y^1(x,\pi R - y) &= A_y^5(x,\pi R + y), \end{aligned} \tag{B.2}$$

および，

$$\begin{aligned} A_y^5(x,-y) &= -A_y^5(x,y), \\ A_y^5(x,\pi R - y) &= A_y^1(x,\pi R + y), \end{aligned} \tag{B.3}$$

[6] ここに示す計算は，私が本論文執筆にあたってこの部分で煮詰まっていた際に，指導教員の川村先生に教えていただきました。川村先生にご指導いただいた内容はここだけにとどまりませんが，あらためて感謝を述べさせていただきます。

のようになる。それぞれの第 2 式について，$y \to y - \pi R$ という置き換えを行うと，

$$
\begin{aligned}
A_y^1(x,-y) &= A_y^1(x,y), \\
A_y^1(x,2\pi R - y) &= A_y^5(x,y),
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

および，

$$
\begin{aligned}
A_y^5(x,-y) &= -A_y^5(x,y), \\
A_y^5(x,2\pi R - y) &= A_y^1(x,y),
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

となり，扱いやすくなる。まず，それぞれの第 1 式に着目すると，$A_y^1(x,y)$ は y についての偶関数，$A_y^5(x,y)$ は y についての奇関数であるから，適当なパラメータ γ を用いて，

$$
\begin{aligned}
A_y^1(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_y^{1(n)}(x) \cos \frac{n-\gamma}{R} y, \\
A_y^5(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_y^{5(n)}(x) \sin \frac{n-\gamma}{R} y,
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

と書ける。和は $n=1$ からとしたが，$n=0$ からでもよい。γ の範囲は計算の最後に適当なものをとるとする。次に，これらが式 (B.4) および (B.5) の第 2 式をも満たすものになっているかどうかを見る。言い換えれば，$A_y^{1(n)}(x)$，$A_y^{5(n)}(x)$，γ の適切な設定によってそれらの式をも満たせるようになるかどうかを見る。これらを式 (B.4) の 2 番目の式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
A_y^1(x,2\pi R - y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_y^{1(n)}(x) \cos \left\{ \frac{n-\gamma}{R}(2\pi R - y) \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_y^{1(n)}(x) \cos \left(\frac{n-\gamma}{R} y + 2\pi\gamma \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_y^{5(n)}(x) \sin \frac{n-\gamma}{R} y,
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

となる。すると，$\cos\left(\chi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin\chi$，$\cos\left(\chi \pm \frac{3\pi}{2}\right) = \pm \sin\chi$ であるから，γ の範囲を $-1 < \gamma < 1$ として $\gamma = \pm\frac{1}{4}$ もしくは $\gamma = \pm\frac{3}{4}$ とおけば，$A_y^{1(n)}(x) = \mp A_y^{5(n)}(x)$ もしくは $A_y^{1(n)}(x) = \pm A_y^{5(n)}(x)$ のもとで等式が成立することが分かる。同様にして式 (B.5) の第 2 式からも，同じ結果が得られる。したがって式 (B.4) および (B.5) の解としては，

$$
A_y^1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_y^{1(n)}(x) \cos \frac{n-\gamma}{R} y,
$$

$$A_y^5(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_y^{5(n)}(x) \sin \frac{n-\gamma}{R} y,$$

$$\begin{cases} A_y^{1(n)}(x) = \mp A_y^{5(n)}(x), \quad \text{for} \quad \gamma = \pm\frac{1}{4}, \quad (\text{複号同順}) \\ A_y^{1(n)}(x) = \pm A_y^{5(n)}(x), \quad \text{for} \quad \gamma = \pm\frac{3}{4}, \quad (\text{複号同順}) \end{cases} \tag{B.8}$$

が得られる。すると $A_y^1(x,y)$ および $A_y^5(x,y)$ のカルツァ・クライン展開は，一般にはこれら可能な解の線型結合として，

$$A_y^1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_y^{1(n)-}(x) \cos \frac{n-\frac{1}{4}}{R} y + A_y^{1(n)+}(x) \cos \frac{n+\frac{1}{4}}{R} y \right.$$
$$\left. + \tilde{A}_y^{1(n)-}(x) \cos \frac{n-\frac{3}{4}}{R} y + \tilde{A}_y^{1(n)+}(x) \cos \frac{n+\frac{3}{4}}{R} y \right\},$$
$$A_y^5(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -A_y^{1(n)-}(x) \cos \frac{n-\frac{1}{4}}{R} y + A_y^{1(n)+}(x) \cos \frac{n+\frac{1}{4}}{R} y \right.$$
$$\left. + \tilde{A}_y^{1(n)-}(x) \cos \frac{n-\frac{3}{4}}{R} y - \tilde{A}_y^{1(n)+}(x) \cos \frac{n+\frac{3}{4}}{R} y \right\}, \tag{B.9}$$

と書くことができる。ここで $A_y^{1(n)-}(x)$，$A_y^{1(n)+}(x)$，$\tilde{A}_y^{1(n)-}(x)$，$\tilde{A}^{1(n)+}y(x)$ はそれぞれ異なる 4 次元場である。

C　$T^2/\mathbb{Z}_2$ におけるひねり行列のブロック対角化の詳細

ここでは，3.4 節で示された結果のより詳しい計算過程を示す。内容は複雑であるが使用している数学は基本的な線形代数である。その点は $T^2/\mathbb{Z}_3$，$T^2/\mathbb{Z}_4$，$T^2/\mathbb{Z}_6$ でも同様である。

R_0，T_1 は式 (3.35)，(3.37)，(3.38) のように表されるとする。T_2 は部分行列 $T_2^{(\lambda\lambda')}$ $(\lambda, \lambda' = 0, \ldots, M)$ を用いて

$$T_2 = \begin{pmatrix} T_2^{(00)} & T_2^{(01)} & \cdots \\ T_2^{(10)} & T_2^{(11)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{C.1}$$

と表されるとする。

C.1　$T_2^{(0m)} = T_2^{(m0)} = 0$ の導出

R_0 と T_1 を上記のブロック対角型に保ったまま，T_2 をユニタリ変換によって簡潔な形へと変換していく。まずは式 (3.34) の中の $[T_1, T_2] = 0$ によって T_2 の形に制限が与えられることを見

る。T_1 と T_2 が上に述べたような形に書かれるとき，

$$T_1T_2 = \begin{pmatrix} T_1^{(0)}T_2^{(00)} & T_1^{(0)}T_2^{(01)} & \cdots \\ T_1^{(1)}T_2^{(10)} & T_1^{(1)}T_2^{(11)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad T_2T_1 = \begin{pmatrix} T_2^{(00)}T_1^{(0)} & T_2^{(01)}T_1^{(1)} & \cdots \\ T_2^{(10)}T_1^{(0)} & T_2^{(11)}T_1^{(1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{C.2}$$

であるから，$T_1^{(0)}T_2^{(00)} = T_2^{(00)}T_1^{(0)}$ が得られ，また $m, m' = 1, \ldots, M$ について $T_1^{(0)}T_2^{(0m)} = T_2^{(0m)}T_1^{(m)}$，$T_1^{(m)}T_2^{(m0)} = T_2^{(m0)}T_1^{(0)}$，$T_1^{(m)}T_2^{(mm')} = T_2^{(mm')}T_1^{(m)}$ が得られる。これらのうちの 2 番目と 3 番目の式，すなわち $T_1^{(0)}T_2^{(0m)} = T_2^{(0m)}T_1^{(m)}$ と $T_1^{(m)}T_2^{(m0)} = T_2^{(m0)}T_1^{(0)}$ とからは，$T_2^{(0m)}$ と $T_2^{(m0)}$ がゼロであることが導かれる。具体的に $T_1^{(0)}T_2^{(0m)} = T_2^{(0m)}T_1^{(m)}$ について見てみると，この式は各行列の要素を用いて

$$\sum_{k=1}^{n^{(0)}} (T_1^{(0)})_{ik}(T_2^{(0m)})_{kj} = \sum_{k=1}^{2r^{(m)}} (T_2^{(0m)})_{ik}(T_1^{(m)})_{kj}, \tag{C.3}$$

と書ける。ここで行列 A の (i,j) 要素（i 行 j 列にある要素）を $(A)_{ij}$ と書いた。$T_1^{(0)}$ の要素は $l_i \in \mathbb{Z}$ を用いて $(T_1^{(0)})_{ik} = (-1)^{l_i}\delta_{ik}$ と書けるから，この式はさらに

$$\sum_{k=1}^{2r^{(m)}} (T_2^{(0m)})_{ik} \left[(T_1^{(m)})_{kj} - (-1)^{l_i}\delta_{kj} \right] = 0, \tag{C.4}$$

と書き換えることができる。ここで $2r^{(m)} \times 2r^{(m)}$ の行列 $\tilde{T}_1^{(m)}$ を $(\tilde{T}_1^{(m)})_{kj} = (T_1^{(m)})_{kj} - (-1)^{l_i}\delta_{kj}$ と定義すると，この行列は

$$\tilde{T}_1^{(m)} = \begin{pmatrix} \cos\theta^{(m)} - (-1)^{l_i} & i\sin\theta^{(m)} \\ i\sin\theta^{(m)} & \cos\theta^{(m)} - (-1)^{l_i} \end{pmatrix} \otimes I_{r^{(m)}}, \tag{C.5}$$

と書ける。$2r^{(m)}$ は非負の整数である。以後も同様に，この $2r^{(m)}$ のように行列のサイズを表すパラメータはすべて非負の整数である。$\cos\theta^{(m)} \neq \pm 1$ であるから $\det \tilde{T}_1^{(m)} \neq 0$ が成り立つ。すなわち $\tilde{T}_1^{(m)}$ には逆行列が存在する。したがって式 (C.4) より $T_2^{(0m)} = 0$ が成り立つ。$T_2^{(m0)} = 0$ も同様にして $T_1^{(m)}T_2^{(m0)} = T_2^{(m0)}T_1^{(0)}$ から導かれる。

C.2 $T_2^{(00)}$ の，2×2 部分行列への分解

次に $T_1^{(0)}T_2^{(00)} = T_2^{(00)}T_1^{(0)}$ に着目し，$T_2^{(00)}$ がブロック対角化されること，さらにその各ブロックが 2×2 部分行列たちから構成されたものになることを見る。まずこれらの部分行列について，適当な基底を選ぶことにより $R_0^{(0)}$ および $T_1^{(0)}$ が

$$R_0^{(0)} = \begin{pmatrix} R_0^{(0),1} & 0 \\ 0 & R_0^{(0),2} \end{pmatrix}, \qquad T_1^{(0)} = \begin{pmatrix} T_1^{(0),1} & 0 \\ 0 & T_1^{(0),2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{n^{(0),1}} & 0 \\ 0 & I_{n^{(0),2}} \end{pmatrix}, \tag{C.6}$$

で与えられるようにすることができる。$n^{(0),1}+n^{(0,2)}=n^{(0)}$ である。式 (3.37) の上で述べたように一般には $R_0^{(0)}$ も $T_1^{(0)}$ も 1 または -1 を要素とする対角行列であるが，$T_1^{(0)}$ のほうで左上に -1 が並び右下に 1 が並ぶように基底を選んだということである。すると $T_1^{(0)}T_2^{(00)}=T_2^{(00)}T_1^{(0)}$ より

$$T_2^{(00)}=\begin{pmatrix} T_2^{(00),1} & 0 \\ 0 & T_2^{(00),2} \end{pmatrix}, \tag{C.7}$$

が導かれる。すなわち $T_2^{(00)}$ がブロック対角型になる。他方，式 (3.34) より

$$(R_0^{(0),a})^2=(T_2^{(00),a}R_0^{(0),a})^2=I_{n_a^{(0)}}, \qquad a=1,2, \tag{C.8}$$

である。$R_0^{(0),a}$ と $T_2^{(00),a}$ を 3.2 節の P_0 と T に対応させれば，式 (C.8) は式 (3.1) に対応する。そしてそこで P_0 を対角型に保ちつつ T を単純化したのと同様にして，$R_0^{(0),a}$ を対角型に保ちつつ $T_2^{(00),a}$ を単純化することができる。このとき $T_1^{(0),a}$ は $-I_{n_1^{(0)}}$ または $I_{n_2^{(0)}}$ という単位行列であるため，それらの単純化のために行うユニタリ変換のもとで変化しない。したがって，$R_0^{(0),a}$，$T_1^{(0),a}$，$T_2^{(00),a}$ は次のような形にもっていくことができる（それら三者が次の形になるように基底を選ぶことができる）：

$$R_0^{(0),a}=\begin{pmatrix} R_0^{(0),a,0} & & & \\ & R_0^{(0),a,1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_0^{(0),a,M_0^{(a)}} \end{pmatrix}, \qquad R_0^{(0),a,m}=-\sigma_3\otimes I_{r^{(0),a,m}}, \tag{C.9}$$

$$T_1^{(0),a}=\begin{pmatrix} T_1^{(0),a,0} & & & \\ & T_1^{(0),a,1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_1^{(0),a,M_0^{(a)}} \end{pmatrix}, \qquad T_1^{(0),a,m}=(-1)^a I_2\otimes I_{r^{(0),a,m}}, \tag{C.10}$$

$$T_2^{(00),a}=\begin{pmatrix} T_2^{(00),a,0} & & & \\ & T_2^{(00),a,1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_2^{(00),a,M_0^{(a)}} \end{pmatrix}, \quad T_2^{(00),a,m}=e^{i\phi^{(0),a,m}\sigma_1}\otimes I_{r^{(0),a,m}}. \tag{C.11}$$

ここで $R_0^{(0),a,0}$，$T_1^{(0),a,0}$，$T_2^{(00),a,0}$ はいずれも 1 または -1 を要素とする $r^{(0),a,0}\times r^{(0),a,0}$ 対角行列である。実数パラメータ $\phi^{(0),a,m}$ は $0<\phi^{(0),a,m}<\pi$ に範囲をとるものであり，$m\neq m'$ に対して $\phi^{(0),a,m}\neq\phi^{(0),a,m'}$ である。（上付き添字が多くなって煩雑だが，本著では上付き添字が多ければ多いほど，より下位の部分行列であることを示している。例えば $T_2^{(00),a}$ は $T_2^{(00)}$ の部分行列，$T_2^{(00),a,m}$ は $T_2^{(00),a}$ の部分行列である。そして $r^{(0),a,m}$ などはそれらのサイズである）。$T_2^{(00),a}$ は，2×2 部分行列 $e^{i\phi^{(0),a,m}\sigma_1}$ を構成要素とする行列へと再構成されている。

C.3　T_2 のブロック対角化

$T_2^{(mm')}$ $(m, m' = 1, \ldots, M)$ について議論する。まずこれをさらに細かく部分行列に分けて，

$$T_2^{(mm')} = \begin{pmatrix} (T_2^{(mm')})_{(11)} & (T_2^{(mm')})_{(12)} \\ (T_2^{(mm')})_{(21)} & (T_2^{(mm')})_{(22)} \end{pmatrix}, \tag{C.12}$$

を定義する。$(T_2^{(mm')})_{(kl)}$ は一般には互いに異なる行列であるが，サイズは共通であり，(k,l) に関係なく $r^{(m)} \times r^{(m')}$ であるとする。$T_2^{(mm')}$ は式 (3.38) の下で述べたように $2r^{(m)} \times 2r^{(m')}$ の行列であるから，これを均等に 4 分割したことになる。他方，$r^{(m)} \times r^{(m')}$ の部分行列 $T_{2,\mu}^{(mm')}$ $(\mu = 0,1,2,3)$ を用いると

$$T_2^{(mm')} = \sum_{\mu=0}^{3} \sigma_\mu \otimes T_{2,\mu}^{(mm')}, \tag{C.13}$$

と書くこともできる。ここで $\sigma_\mu = (\sigma_0, \sigma_i)$ $(i = 1,2,3)$ であり，σ_0 は 2×2 単位行列，σ_i はパウリ行列である。したがって 4 つの $(T_2^{(mm')})_{(kl)}$ は 4 つの $T_{2,\mu}^{(mm')}$ の適当な線型結合によって決まると言える。これを $[T_1, T_2] = 0$ に代入し，公式 $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$ などを用いて整理すると，

$$\begin{aligned} &\left(e^{i\theta^{(m)}\sigma_1} - e^{i\theta^{(m')}\sigma_1}\right)(\sigma_0 \otimes T_{2,0}^{(mm')} + \sigma_1 \otimes T_{2,1}^{(mm')}) \\ &\quad + \left(e^{i\theta^{(m)}\sigma_1} - e^{-i\theta^{(m')}\sigma_1}\right)(\sigma_2 \otimes T_{2,2}^{(mm')} + \sigma_3 \otimes T_{2,3}^{(mm')}) = 0, \end{aligned} \tag{C.14}$$

が成り立つ。この式から，$m \neq m'$ のとき $T_{2,\mu}^{(mm')} = 0$ であること，また $T_{2,2}^{(mm)} = T_{2,3}^{(mm)} = 0$ であることが分かる。したがって T_2 はブロック対角型行列であることがわかる。記述の便のため，$T_{2,0}^{(mm)} = A_2^{(m)}$ および $T_{2,1}^{(mm)} = B_2^{(m)}$ と書くことにすると，T_2 は

$$T_2 = \begin{pmatrix} T_2^{(00)} & & & \\ & T_2^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_2^{(M)} \end{pmatrix}, \qquad \text{where} \qquad T_2^{(m)} = \sigma_0 \otimes A_2^{(m)} + \sigma_1 \otimes B_2^{(m)}. \tag{C.15}$$

と書ける。

C.4　$T_2^{(m)}$ の，2×2 部分行列への分解

式 (3.34) の $(T_2 R_0)^2 = I$ より $(T_2 R_0)^\dagger = T_2 R_0$ が導かれ，そこから $(T_2^{(m)} R_0^{(m)})^\dagger = T_2^{(m)} R_0^{(m)}$ が導かれる。そして $R_0^{(m)} = -\sigma_3 \otimes I_{r^{(m)}}$ であるから，$A_2^{(m)\dagger} = A_2^{(m)}$ および $B_2^{(m)\dagger} = -B_2^{(m)}$ が導か

れる。つまり $A_2^{(m)}$ はエルミート行列，$B_2^{(m)}$ は歪エルミート行列であって，どちらも正規行列であるからユニタリ変換によって対角化可能であることが分かる。そこで $A_2^{(m)}$ が対角化されるようなユニタリ変換を $R_0^{(m)}$，$T_1^{(m)}$，$T_2^{(m)}$ に対し行う。$A_2^{(m)}$ を対角化するような $r^{(m)} \times r^{(m)}$ のユニタリ行列を $W_{2,0}^{(mm)}$ とすると，$\sigma_0 \otimes W_{2,0}^{(mm)}$（つまり $I_2 \otimes W_{2,0}^{(mm)}$）によるユニタリ変換 $T_2^{(m)} \to (\sigma_0 \otimes W_{2,0}^{(mm)}) T_2^{(m)} (\sigma_0 \otimes W_{2,0}^{(mm)})^\dagger$ を行えば，$R_0^{(m)}$，$T_1^{(m)}$ を不変に保ったまま $T_2^{(m)}$ の中の $A_2^{(m)}$ を対角化できる。公式 $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$ や $(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$ を用いて確認できる。このユニタリ変換によって対角化された $A_2^{(m)}$ を $\hat{A}_2^{(m)}$ と書き，その成分を $(A_2^{(m)})_{ij} = \tilde{a}_2^{(m)i} \delta_{ij}$ $(\tilde{a}_2^{(m)i} \in \mathbb{R})$ と書くことにする。なお，ある行列 M が対角化されているときにハットを付けて $\hat{M}$ と書く記法は，本論文で頻繁に用いる。そして $B_2^{(m)}$ のほうは $T_2^{(m)} = \sigma_0 \otimes \hat{A}_2^{(m)} + \sigma_1 \otimes B_2^{(m)}$ を満たす行列としてあらためて定義し直すことにする。これを $T_2 T_2^\dagger = I$ に代入すると，

$$\sigma_0 \otimes (I_{r^{(m)}} - \hat{A}_2^{(m)} \hat{A}_2^{(m)} + B_2^{(m)} B_2^{(m)}) + \sigma_1 \otimes (\hat{A}_2^{(m)} B_2^{(m)} - B_2^{(m)} \hat{A}_2^{(m)}) = 0, \tag{C.16}$$

が導かれる。そして第二項から $(\tilde{a}_2^{(m)i} - \tilde{a}_2^{(m)j})(B_2^{(m)})_{ij} = 0$ が導かれる。すると 3.2 節の式 (3.6) の下で行ったのと同様に，適当な行と列の並び替えによって $B_2^{(m)}$ はブロック対角型の行列に変換できる。その際 $\hat{A}_2^{(m)}$ は対角型のまま変わらない（対角要素の並び順は変わるが)。その結果 $T_2^{(m)}$ 全体としてもブロック対角化されることになって，結局 $R_0^{(m)}$，$T_1^{(m)}$，$T_2^{(m)}$ は,

$$R_0^{(m)} = \begin{pmatrix} R_0^{(m),1} & & & \\ & R_0^{(m),2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_0^{(m),M^{(m)}} \end{pmatrix}, \qquad R_0^{(m),m'} = -\sigma_3 \otimes I_{r^{(m),m'}}, \tag{C.17}$$

$$T_1^{(m)} = \begin{pmatrix} T_1^{(m),1} & & & \\ & T_1^{(m),2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_1^{(m),M^{(m)}} \end{pmatrix}, \qquad T_1^{(m),m'} = e^{i\theta^{(m)}\sigma_1} \otimes I_{r^{(m),m'}}, \tag{C.18}$$

$$T_2^{(m)} = \begin{pmatrix} T_2^{(m),1} & & & \\ & T_2^{(m),2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_2^{(m),M^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{C.19}$$

と表示されるようになる。式 (C.19) の中の部分行列 $T_2^{(m),m'}$ は,

$$T_2^{(m),m'} = a_2^{(m),m'} \sigma_0 \otimes I_{r^{(m),m'}} + \sigma_1 \otimes B_2^{(m),m'}, \tag{C.20}$$

である。ここで $a_2^{(m),m'}\in\mathbb{R}$ であり，$B_2^{(m),m'}$ は $r^{(m),m'}\times r^{(m),m'}$ 行列である。$B_2^{(m),m'}$ は $B_2^{(m),m'\dagger}=-B_2^{(m),m'}$ を満たす。これを $T_2T_2^\dagger=I$ に代入すると $(1-a_2^{(m),m'2})I_{r^{(m),m'}}=B_2^{(m),m'}B_2^{(m),m'\dagger}$ が得られ，$a_2^{(m),m'2}\leq 1$ であることが分かる。また $B_2^{(m),m'}$ に関してここで述べた 2 つの関係式から，$B_2^{(m),m'}$ は適当なユニタリ行列 $U^{(m),m'}$ を用いて $B_2^{(m),m'}=i\sqrt{1-a_2^{(m),m'2}}U^{(m),m'}$ と書けることも分かる。そこで $W^{(m),m'}U^{(m),m'}W^{(m),m'\dagger}$ が対角型行列となるような行列 $W^{(m),m'}$ を用いて $T_2^{(m),m'}\to(\sigma_0\otimes W^{(m),m'})T_2^{(m),m'}(\sigma_0\otimes W^{(m),m'})^\dagger$ というユニタリ変換を行うと，R_0 と T_1 の形を不変に保ったまま $U^{(m),m'}$ が対角型であるような基底へと移ることができる。$a_2^{(m),m'2}=\cos\phi^{(m),m'2}$ とし，対角化された $U^{(m),m'}$ を $\hat{U}^{(m),m'}$ と書けば，

$$T_2^{(m),m'}=\begin{pmatrix}\cos\phi^{(m),m'}I_{r^{(m),m'}} & i\sin\phi^{(m),m'}\hat{U}^{(m),m'}\\ i\sin\phi^{(m),m'}\hat{U}^{(m),m'} & \cos\phi^{(m),m'}I_{r^{(m),m'}}\end{pmatrix}, \tag{C.21}$$

となる。ここで $0\leq\phi^{(m),m'}<2\pi$ であり，$m'\neq m''$ に対して $\phi^{(m),m'}\neq\phi^{(m),m''}$ である。$B_2^{(m),m'\dagger}=-B_2^{(m),m'}$ であったから $U^{(m),m'}$ はユニタリ行列であるとともにエルミート行列でもあり，したがってその固有値は ± 1 であることに着目すると，式 (C.21) の行列に対してさらに行列の並び替えを行い，

$$T_2^{(m),m'}=\begin{pmatrix}T_2^{(m),m',1} & \\ & T_2^{(m),m',2}\end{pmatrix}, \tag{C.22}$$

$$T_2^{(m),m',\nu}=\begin{pmatrix}\cos\phi^{(m),m',\nu}I_{n^{(m),m',\nu}} & i\sin\phi^{(m),m',\nu}I_{n^{(m),m',\nu}}\\ i\sin\phi^{(m),m',\nu}I_{n^{(m),m',\nu}} & \cos\phi^{(m),m',\nu}I_{n^{(m),m',\nu}}\end{pmatrix}=e^{i\theta^{(m),m',\nu}}\otimes I_{n^{(m),m',\nu}}, \tag{C.23}$$

となる。ここで $0\leq\phi^{(m),m',\nu}<2\pi$ であり，$\nu\neq\nu'$ に対して $\phi^{(m),m',\nu}\neq\phi^{(m),m',\nu'}$ であり，$n^{(m),m',1}+n^{(m),m',2}=n^{(m),m'}$ である。このとき $R_0^{(m),m'}$ と $T_1^{(m),m'}$ は，

$$R_0^{(m),m'}=\begin{pmatrix}R_0^{(m),m',1} & \\ & R_0^{(m),m',2}\end{pmatrix},\qquad T_1^{(m),m'}=\begin{pmatrix}T_1^{(m),m',1} & \\ & T_1^{(m),m',2}\end{pmatrix}, \tag{C.24}$$

$$R_0^{(m),m',\nu}=-\sigma_3\otimes I_{n^{(m),m',\nu}},\qquad T_1^{(m),m',\nu}=e^{i\theta^{(m)}\sigma_1}\otimes I_{n^{(m),m',\nu}}, \tag{C.25}$$

となる。これらを使ってあらためて $T_2^{(m),m'}$ を定義し直すと，（例えば $T_2^{(m),m',1}$ をあらためて $T_2^{(m),m'}$ とし，$T_2^{(m),m',2}$ を $T_2^{(m),m'+1}$ とするようにラベルの振り直しをしていき，それに合わせて $\phi^{(m),m'}$）も再定義していくと，$T_2^{(m),m'}$ は，

$$T_2^{(m),m'}=\begin{pmatrix}\cos\phi^{(m),m'}I_{r^{(m),m'}} & i\sin\phi^{(m),m'}I_{r^{(m),m'}}\\ i\sin\phi^{(m),m'}I_{r^{(m),m'}} & \cos\phi^{(m),m'}I_{r^{(m),m'}}\end{pmatrix}=e^{i\phi^{(m),m'}\sigma_1}\otimes I_{r^{(m),m'}}. \tag{C.26}$$

と書ける。

D　$T^2/\mathbb{Z}_3$ におけるひねり行列のブロック対角化の詳細

ここでは，$T^2/\mathbb{Z}_3$ オービフォルドに関して行った計算の詳細を示す。3.5 節冒頭で述べたように，R_0 と T_1 を独立な行列として選び，それらが

$$R_0 = \begin{pmatrix} \omega I_{n_1} & & \\ & \omega^2 I_{n_2} & \\ & & I_{n_3} \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} (T_1)_{(11)} & (T_1)_{(12)} & (T_1)_{(13)} \\ (T_1)_{(21)} & (T_1)_{(22)} & (T_1)_{(23)} \\ (T_1)_{(31)} & (T_1)_{(32)} & (T_1)_{(33)} \end{pmatrix}, \quad (T_1)_{(kl)} = M^{[k-l]}_{k\,l}. \tag{D.1}$$

と表示されるような基底から出発する。ここで n_k $(k = 1, 2, 3)$ は非負の整数であり，$M^{[k-l]}_{k\,l}$ は $n_k \times n_l$ 行列である。また $M^{[k-l]}_{k\,l} k' = k \pmod 3$ および $l' = l \pmod 3$ に対し $M^{[k-l]}_{k\,l} = M^{[k'-l']}_{k\,l} = M^{[k-l]}_{k'\,l'}$ とする記法を用いて T_1 の部分行列を表したものである。なお $T^2/\mathbb{Z}_3$ におけるひねり行列の計算では，ω について成り立つ関係式 $\bar{\omega} = \omega^{-1} = \omega^2$，$1 + \omega + \omega^2 = 0$ がしばしば便利である。

D.1　$R_a^3 = I$ からの帰結

まず $R_a^3 = I$ $(a = 0, 1, 2)$ に着目する。$a = 0$ に対してはこれは自明に成り立つ。$a = 1, 2$ については，R_a^3 を計算して調べるのは少し計算が煩雑になるので，$R_1^\dagger = R_1^2$ および $R_2 = R_2^{\dagger 2}$ を調べるのが便利である。式 (3.53) を利用すれば，これらの式は $T_1^\dagger$ についての表式，$T_1^\dagger = R_0 T_1 R_0 T_1 R_0 = R_0^\dagger T_1 R_0^\dagger T_1 R_0^\dagger$ へと導く。この式は $T_1 T_2 T_3 = T_1 T_3 T_2 = I$ から導くこともできる。そして $(T_1^\dagger)_{(k\,k-q)} = (T_1)_{(k-q\,k)}{}^\dagger$ であるから，

$$\begin{aligned} M^{[-q]\dagger}_{k-q\,k} &= \sum_{q'} \omega^k M^{[-q']}_{k\,k+q'} \omega^{k+q'} M^{[q+q']}_{k+q'\,k-q} \omega^{k-q} = \sum_{q'} \omega^{q'-q} M^{[-q']}_{k\,k+q'} M^{[q+q']}_{k+q'\,k-q} \\ &= \sum_{q'} \omega^{-k} M^{[-q']}_{k\,k+q'} \omega^{-k-q'} M^{[q+q']}_{k+q'\,k-q} \omega^{-k+q} = \sum_{q'} \omega^{-q'+q} M^{[-q']}_{k\,k+q'} M^{[q+q']}_{k+q'\,k-q}, \end{aligned} \tag{D.2}$$

が得られる。ここで q' についての和は任意の連続する 3 つの整数についてとる。ここから抽出される等式のひとつ $\sum_{q'} \omega^{q'-q} M^{[-q']}_{k\,k+q'} M^{[q+q']}_{k+q'\,k-q} = \sum_{q'} \omega^{-q'+q} M^{[-q']}_{k\,k+q'} M^{[q+q']}_{k+q'\,k-q}$ からは，$\bar{\omega} = \omega^2$ として

$$(\omega - \bar{\omega}) M^{[-1]}_{k\,k+1} M^{[1]}_{k+1\,k} + (\bar{\omega} - \omega) M^{[1]}_{k\,k-1} M^{[-1]}_{k-1\,k} = 0, \qquad \text{for } q = 0, \tag{D.3}$$

$$(\omega - \bar{\omega}) M^{[1]}_{k\,k-1} M^{[0]}_{k-1\,k-1} + (\bar{\omega} - \omega) M^{[0]}_{k\,k} M^{[1]}_{k\,k-1} = 0, \qquad \text{for } q = 1, \tag{D.4}$$

$$(\omega - \bar{\omega}) M^{[0]}_{k\,k} M^{[-1]}_{k\,k+1} + (\bar{\omega} - \omega) M^{[-1]}_{k\,k+1} M^{[0]}_{k+1\,k+1} = 0, \qquad \text{for } q = -1, \tag{D.5}$$

が要請される。$q = 0 = 3 = \cdots \pmod 3$，$q = -1 = 2 = \cdots \pmod 3$ 等であるから $q = 0$ の代わりに $q = 3$，$q = -1$ の代わりに $q = 2$ 等と書いてもよいが，本節ではこれ以後も $q = 0, 1, -1$

を用いて書いていくことにする。いずれにせよ，これらはひとまとめにして

$$M^{[q]}_{k\,k-q}M^{[-q]}_{k-q\,k} = M^{[-q]}_{k\,k+q}M^{[q]}_{k+q\,k}, \tag{D.6}$$

$$M^{[0]}_{k\,k}M^{[q]}_{k\,k-q} = M^{[q]}_{k\,k-q}M^{[0]}_{k-q\,k-q}, \tag{D.7}$$

と書くことができる。いずれも $q=0$ のときには自明となる。またさらに式 (H.3) のようにまとめることもできる。

式 (D.7) の両辺に $M^{[-q]}_{k-q\,k}$ をかけ，その右辺に元の式 (D.7) を適用すると，$M^{[0]}_{k\,k}$ は $M^{[-q']}_{k\,k+q'}M^{[q']}_{k+q'\,k}$ という積と交換することが分かる。そしてこの積は式 (D.2) で $q=0$ とおいたときに現れるものであるから，結局 $M^{[0]}_{k\,k}$ はその複素共役と交換するということ，すなわち $[M^{[0]}_{k\,k}, M^{[0]\dagger}_{k\,k}] = 0$ を満たし正規行列であることが分かる。したがって $M^{[0]}_{k\,k}$ は適当なユニタリ変換によって対角化可能である。

D.2　ブロック対角化

$M^{[0]}_{k\,k}$ を対角化するユニタリ変換は R_0 を変化させないから，R_0 を対角型に保ったまま，$(M^{[0]}_{k\,k})_{ij} = a^i_k\delta_{ij}$ であるような基底に移行することができる。このとき式 (D.7) は

$$(a^i_k - a^j_{k-q})(M^{[q]}_{k\,k-q})_{ij} = 0, \tag{D.8}$$

と書け，ここから，$a^i_k \neq a^j_{k-q}$ のとき $(M^{[q]}_{k\,k-q})_{ij} = 0$ であることが導かれる。すると，これまでの節と同様に T_1 は行列の入れ替えによってブロック対角型の形にできる。このとき R_0 は対角要素の並び順が変わるが対角行列であるという点では変わらない：

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_0^{(1)} & & & \\ & R_0^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_0^{(M)} \end{pmatrix}, \quad R_0^{(m)} = \begin{pmatrix} (R_0^{(m)})_{(11)} & (R_0^{(m)})_{(12)} & (R_0^{(m)})_{(13)} \\ (R_0^{(m)})_{(21)} & (R_0^{(m)})_{(22)} & (R_0^{(m)})_{(23)} \\ (R_0^{(m)})_{(31)} & (R_0^{(m)})_{(32)} & (R_0^{(m)})_{(33)} \end{pmatrix}, \tag{D.9}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} T_1^{(1)} & & & \\ & T_1^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_1^{(M)} \end{pmatrix}, \quad T_1^{(m)} = \begin{pmatrix} (T_1^{(m)})_{(11)} & (T_1^{(m)})_{(12)} & (T_1^{(m)})_{(13)} \\ (T_1^{(m)})_{(21)} & (T_1^{(m)})_{(22)} & (T_1^{(m)})_{(23)} \\ (T_1^{(m)})_{(31)} & (T_1^{(m)})_{(32)} & (T_1^{(m)})_{(33)} \end{pmatrix}. \tag{D.10}$$

ここで

$$(R_0^{(m)})_{(kl)} = \omega^k\delta_{kl}I_{n_k^{(m)}}, \quad (T_1^{(m)})_{(k\,k-q)} = M^{(m)[q]}_{k\,k-q}, \quad M^{(m)[0]}_{k\,k} = a^{(m)}I_{n_k^{(m)}}, \tag{D.11}$$

であり，$n_k^{(m)}$ $(m=1,2,\cdots,M)$ はこれまでと同様，非負の整数である。より具体的に書けば，

$$R_0^{(m)}=\begin{pmatrix}\omega I_{n_1^{(m)}} & & \\ & \omega^2 I_{n_2^{(m)}} & \\ & & I_{n_3^{(m)}}\end{pmatrix},\quad T_1^{(m)}=\begin{pmatrix}a^{(m)}I_{n_1^{(m)}} & M_{1\,2}^{(m)[-1]} & M_{1\,3}^{(m)[1]} \\ M_{2\,1}^{(m)[1]} & a^{(m)}I_{n_2^{(m)}} & M_{2\,3}^{(m)[-1]} \\ M_{3\,1}^{(m)[-1]} & M_{3\,2}^{(m)[1]} & a^{(m)}I_{n_3^{(m)}}\end{pmatrix},\tag{D.12}$$

となる。ここで $a^{(m)}$ は $m\neq m'$ に対し $a^{(m)}\neq a^{(m')}$ となるパラメータである。

また，後の便のため式 (D.2) を書き直すと，

$$\overline{a^{(m)}}I_{n_k^{(m)}}=a^{(m)2}I_{n_k^{(m)}}-M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k-1\,k}^{(m)[-1]}\qquad\text{for } q=0,\tag{D.13}$$

$$M_{k-q\,k}^{(m)[-q]\dagger}=-a^{(m)}M_{k\,k-q}^{(m)[q]}+M_{k\,k+q}^{(m)[-q]}M_{k+q\,k-q}^{(m)[-q]}\qquad\text{for } q=\pm1,\tag{D.14}$$

となる。ここで ω についての関係式 $\omega^{-1}=\omega^2$ や $1+\omega+\omega^2=0$，$M_{k\,k-q}^{(m)[q]}$ の定義（記法）から来る $M_{k\,k-q}^{(m)[q]}=M_{k\,k-q\mp3}^{(m)[q\pm3]}$，上で求めた式 (D.6)，(D.7)，そして現在の基底において $M_{k\,k}^{(m)[0]}=a^{(m)}I_{n_k^{(m)}}$ であることを用いた。

D.3 $T_1T_1^\dagger=T_1^\dagger T_1=I$ からの帰結

次に T_1 がユニタリ行列であることから来る条件式，$T_1T_1^\dagger=I$ に着目する。この式からは，

$$(T_1^{(m)}T_1^{(m)\dagger})_{(k\,k-q)}=\sum_{q'}M_{k\,k+q'}^{(m)[-q']}M_{k-q\,k+q'}^{(m)[-q'-q]\dagger}=\delta_{q0}I_{n_k^{(m)}},\tag{D.15}$$

が導かれる。より具体的に書けば，

$$M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger}+M_{k\,k+1}^{(m)[-1]}M_{k\,k+1}^{(m)[-1]\dagger}=(1-\left|a^{(m)}\right|^2)I_{n_k^{(m)}}\qquad\text{for } q=0,\tag{D.16}$$

$$a^{(m)}M_{k-q\,k}^{(m)[-q]\dagger}+\overline{a^{(m)}}M_{k\,k-q}^{(m)[q]}+M_{k\,k+q}^{(m)[-q]}M_{k-q\,k+q}^{(m)[q]\dagger}=0\qquad\text{for } q=\pm1,\tag{D.17}$$

である。式 (D.16) の $q=0$ のケースを見ると，$\left|a^{(m)}\right|=1$ の場合 $M_{k\,k\mp1}^{(m)[\pm1]}$（複号同順）はゼロであることが分かる。この場合 $T_1^{(m)}$ はすでに対角型である。$(T_1^{(m)})_{(kl)}=a^{(m)}\delta_{kl}I_{n_k^{(m)}}$ $(\left|a^{(m)}\right|=1)$ と書ける。また以下では $\left|a^{(m)}\right|<1$ の場合を考える。

D.3.1 $0<\left|a^{(m)}\right|<1$ の場合

$0<\left|a^{(m)}\right|<1$ の場合，式 (D.13) より $M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k-1\,k}^{(m)[-1]}$ は $I_{n_k^{(m)}}$ に比例した行列になること，またその比例定数はゼロではないことが分かる。すると，3.2 節で式 (3.13) を導く際に用いたのと同じ線形代数の定理により，$n_1^{(m)}=\mathrm{rank}(M_{1\,3}^{(m)[1]}M_{3\,1}^{(m)[-1]})\leq\mathrm{rank}(M_{3\,1}^{(m)[-1]})\leq n_3^{(m)}=$

$\mathrm{rank}(M_{32}^{(m)[1]}M_{23}^{(m)[-1]}) \le n_2^{(m)} = \mathrm{rank}(M_{21}^{(m)[1]}M_{12}^{(m)[-1]}) \le n_1^{(m)}$ ということが分かる。すなわち $n_1^{(m)} = n_2^{(m)} = n_3^{(m)} (\equiv r^{(m)})$ である。すると $M_{k\,k-q}^{(m)[q]}$ は $r^{(m)} \times r^{(m)}$ の正方行列であるとともに，その大きさと階数とが等しいから，正則行列である。したがって逆行列を持つ。そして上に述べた $M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k-1\,k}^{(m)[-1]} \propto I_{n_k^{(m)}}$ により $M_{k-1\,k}^{(m)[-1]} \propto (M_{k\,k-1}^{(m)[1]})^{-1}$ ということが分かる。

一般に任意の行列を A とすると $AA^\dagger$ はエルミート行列であるから，$M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger}$ はエルミート行列であり，ユニタリ変換によって対角化することができる。そして $M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger}$ を対角化するユニタリ変換は $R_0^{(m)}$ や $M_{k\,k}^{(m)[0]}$ を変化させないから，それらを対角型に保ったまま $M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger}$ を対角化することができる。このとき式 (D.16) より $M_{k\,k+1}^{(m)[-1]}M_{k\,k+1}^{(m)[-1]\dagger}$ も同時に対角化されることが分かる。したがって $k = 1, 2, 3$ のすべてについて対角化を行えば，式 (D.12) に見られる $T_1^{(m)}$ の 6 つの非対角ブロック $M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ すべてについて，$M_{k\,l}^{(m)[k-l]}M_{k\,l}^{(m)[k-l]\dagger}$ が対角化される。このとき $M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ は適当な対角行列 $\hat{M}_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ とユニタリ行列 $U_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ によって $M_{k\,l}^{(m)[k-l]} = \hat{M}_{k\,l}^{(m)[k-l]}U_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ と書ける。簡単のため $\hat{M}_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ は正の実数を成分にもつようにする。非対角ブロックであるから $q = k - l$ の値は 1 または –1 である。さらに，上の段落の最後で述べた $M_{k-1\,k}^{(m)[-1]} \propto (M_{k\,k-1}^{(m)[1]})^{-1}$ を考慮すると，$\hat{M}_{k-1\,k}^{(m)[-1]} \propto (\hat{M}_{k\,k-1}^{(m)[1]})^{-1}$ であること，$U_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ の添字 l は不要になって $U_k^{(m)}$ と書けること，また $[\hat{M}_{k\,l}^{(m)[q]}, U_k^{(m)}] = 0$ であることが分かる。まとめると，$R_0^{(m)}$ や $M_{k\,k}^{(m)[0]}$ を不変に保つ適切なユニタリ変換によって，$q = 1$ であるような部分行列 $\hat{M}_{k\,k-1}^{(m)[1]}$ は $M_{k\,k-1}^{(m)[1]} = \hat{M}_{k\,k-1}^{(m)[1]}U_k^{(m)} \equiv \hat{M}_k^{(m)[1]}U_k^{(m)}$，$q = -1$ であるような部分行列 $\hat{M}_{k-1\,k}^{(m)[-1]}$ は $\hat{M}_{k-1\,k}^{(m)[-1]} \propto (\hat{M}_{k\,k-1}^{(m)[1]})^{-1}$ を用いて $M_{k-1\,k}^{(m)[-1]} = \hat{M}_{k-1\,k}^{(m)[-1]}U_k^{(m)\dagger} \equiv \hat{M}_{k-1}^{(m)[-1]}U_k^{(m)\dagger}$ と書けるようになる。

$\hat{M}_{k\,k-1}^{(m)[1]}$ と $U_k^{(m)}$ に対する制約条件を見つけるために，$M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger} (= (\hat{M}_k^{(m)[1]})^2)$ および $M_{k+1\,k}^{(m)[1]\dagger}M_{k+1\,k}^{(m)[1]} (= (\hat{M}_{k+1}^{(m)[1]})^2)$ を調べる。式 (D.14) を用いると，それらは

$$M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger} = M_{k\,k-1}^{(m)[1]}(-a^{(m)}M_{k-1\,k}^{(m)[-1]} + M_{k-1\,k-2}^{(m)[1]}M_{k-2\,k}^{(m)[1]}), \tag{D.18}$$

$$M_{k+1\,k}^{(m)[1]\dagger}M_{k+1\,k}^{(m)[1]} = (-a^{(m)}M_{k\,k+1}^{(m)[-1]} + M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k-1\,k+1}^{(m)[1]})M_{k+1\,k}^{(m)[1]}, \tag{D.19}$$

と書ける。両者において右辺第二項は同じになっている。また右辺第一項も，式 (D.6) により等しいことが分かる。したがって $\hat{M}_{k\,k-1}^{(m)[1]} = \hat{M}_{k+1\,k}^{(m)[1]}$ である。要点を示すために下付き添字の二番目を省略して書くと $\hat{M}_k^{(m)[1]} = \hat{M}_{k+1}^{(m)[1]}$ である。そしてどの k についてもこれが成り立つから，$\hat{M}_k^{(m)[1]}$ は k の値に関わらず等しいことが分かる。したがってまたユニタリ行列 $U_k^{(m)}$ も任意の $\hat{M}_{k'}^{(m)[1]}$ と交換することが分かる。

$M_{k+1\,k}^{(m)[1]\dagger}U_{k+1}^{(m)} (= \hat{M}_{k+1}^{(m)[1]})$ に加えて，$M_{k\,k+1}^{(m)[-1]}U_{k+1}^{(m)} (= \hat{M}_{k+1}^{(m)[-1]})$ もまた対角化されていることに着目する。すると式 (D.14) より $M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k-1\,k+1}^{(m)[1]}U_{k+1}^{(m)} = \hat{M}_k^{(m)[1]}\hat{M}_{k-1}^{(m)[1]}U_k^{(m)}U_{k-1}^{(m)}U_{k+1}^{(m)}$ な

る行列もまた対角化されていることが要請され，したがって $U_k^{(m)}U_{k-1}^{(m)}U_{k+1}^{(m)}$ という積が対角化されていることが要請される。ここでは特に $U_2^{(m)}U_1^{(m)}U_3^{(m)}$ に着目し，$U_2^{(m)}U_1^{(m)}U_3^{(m)} = \hat{\Theta}^{(m)3}$ とおくことにする。$\hat{\Theta}^{(m)}$ は何らかの対角行列である。このことを用い，$T_1^{(m)}$ に対して以下のようなユニタリ変換を行うと，$R_0^{(m)}$ を不変に保ったまま $M_{k\,k-q}^{(m)[q]}$ を対角化することができる：

$$
\begin{aligned}
T_1^{(m)} &= \begin{pmatrix} a^{(m)}I_{r^{(m)}} & \hat{M}_2^{(m)[-1]}U_2^{(m)\dagger} & \hat{M}_1^{(m)[1]}U_1^{(m)} \\ \hat{M}_2^{(m)[1]}U_2^{(m)} & a^{(m)}I_{r^{(m)}} & \hat{M}_3^{(m)[-1]}U_3^{(m)\dagger} \\ \hat{M}_1^{(m)[-1]}U_1^{(m)\dagger} & \hat{M}_3^{(m)[1]}U_3^{(m)} & a^{(m)}I_{r^{(m)}} \end{pmatrix} \\
\to \quad V^{(m)}T_1^{(m)}V^{(m)\dagger} &= \begin{pmatrix} a^{(m)}I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[-1]}\hat{\Theta}^{(m)\dagger} & \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)} \\ \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)} & a^{(m)}I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[-1]}\hat{\Theta}^{(m)\dagger} \\ \hat{M}^{(m)[-1]}\hat{\Theta}^{(m)\dagger} & \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)} & a^{(m)}I_{r^{(m)}} \end{pmatrix}, \qquad \text{(D.20)}
\end{aligned}
$$

$$
\text{with} \quad V^{(m)} = \begin{pmatrix} \hat{\Theta}^{(m)\dagger}U_2^{(m)} & & \\ & I_{r^{(m)}} & \\ & & \hat{\Theta}^{(m)}U_3^{(m)\dagger} \end{pmatrix}. \qquad \text{(D.21)}
$$

$\hat{M}_k^{(m)[\mp1]}$ は k によらないので $V^{(m)}T_1^{(m)}V^{(m)\dagger}$ を書くにあたっては添字の k を省略した。

D.3.2 $a^{(m)} = 0$

$a^{(m)} = 0$ の場合，, 式 (D.16) と (D.17) の条件は単純化されて

$$
M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger} + M_{k\,k+1}^{(m)[-1]}M_{k\,k+1}^{(m)[-1]\dagger} = I_{n_k^{(m)}}, \quad M_{k\,k+q}^{(m)[-q]}M_{k-q\,k+q}^{(m)[q]\dagger} = 0, \qquad \text{(D.22)}
$$

となる。ここで $q = \pm 1$ である。同様にして，$T_1^\dagger T_1 = I$ から得られる条件式は,

$$
M_{k+1\,k}^{(m)[1]\dagger}M_{k+1\,k}^{(m)[1]} + M_{k-1\,k}^{(m)[-1]\dagger}M_{k-1\,k}^{(m)[-1]} = I_{n_k^{(m)}}, \quad M_{k\,k+q}^{(m)[-q]\dagger}M_{k\,k-q}^{(m)[q]} = 0, \qquad \text{(D.23)}
$$

となる。さらに，式 (D.13) および (D.14) は,

$$
M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k-1\,k}^{(m)[-1]} = 0, \quad M_{k-q\,k}^{(m)[-q]\dagger} = M_{k\,k+q}^{(m)[-q]}M_{k+q\,k-q}^{(m)[-q]}, \qquad \text{(D.24)}
$$

となる。

式 (D.22) の一番目の式に対し，右から $M_{k\,k-1}^{(m)[1]}$ をかけると,

$$
M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger}M_{k\,k-1}^{(m)[1]} = M_{k\,k-1}^{(m)[1]}, \qquad \text{(D.25)}
$$

が得られる。ここで式 (D.23) より $M_{k\,k+1}^{(m)[-1]\dagger}M_{k\,k-1}^{(m)[1]} = 0$ であることを用いた。D.3.1 節の第 2 段落で述べたように，適切なユニタリ変換によって $M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger}$ が対角型であるような基底に移ることができる。このとき $M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger}$ は，式 (D.25) より,

$$
M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger} = \begin{pmatrix} I_{r_k{}^{(m)}} & \\ & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(D.26)}
$$

と書くことができる。ここで ${r_k}^{(m)}$ は $M^{(m)[1]}_{k\,k-1}$ の階数である。それと同時に $M^{(m)[-1]}_{k\,k+1}M^{(m)[-1]\dagger}_{k\,k+1}$ は，式 (D.22) および (D.26) より，

$$M^{(m)[-1]}_{k\,k+1}M^{(m)[-1]\dagger}_{k\,k+1} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{{n_k}^{(m)}-{r_k}^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{D.27}$$

となる。ここから $\mathrm{rank}(M^{(m)[-1]}_{k\,k+1}) = {n_k}^{(m)} - {r_k}^{(m)}$ であることが分かる。

「$m\times n$ 行列 A と $n\times k$ 行列 B があるとき，$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n \le \mathrm{rank}(AB)$ である」というシルベスターの階数不等式を用いると，式 (D.24) の 1 番目の条件からは $\mathrm{rank}(M^{(m)[1]}_{k\,k-1}) + \mathrm{rank}(M^{(m)[-1]}_{k-1\,k}) - {n_{k-1}}^{(m)} \le \mathrm{rank}(0) = 0$ が導かれる。したがって $0 \ge {r_k}^{(m)} + {n_{k-1}}^{(m)} - {r_{k-1}}^{(m)} - {n_{k-1}}^{(m)} = {r_k}^{(m)} - {r_{k-1}}^{(m)}$ である。すると ${r_k}^{(m)} \le {r_{k-1}}^{(m)} \le {r_{k-2}}^{(m)} = {r_{k+1}}^{(m)} \le {r_k}^{(m)}$ となるから，${r_k}^{(m)}$ は k に依らないことが分かる。

上述の議論は $M^{(m)[q]}_{k\,k-q}$ の q の符号を反転させても成立するから，$\mathrm{rank}(M^{(m)[-1]}_{k\,k+1}) = {n_k}^{(m)} - {r_k}^{(m)}$ であること，したがって ${n_k}^{(m)}$ もまた k に依らないことが分かる。

次に，$M^{(m)[-q]\dagger}_{k\,k+q}M^{(m)[-q]}_{k\,k+q}$ を検討する。(式 (D.26) と (D.27) に示したものは $M^{(m)[-q]}_{k\,k+q}M^{(m)[-q]\dagger}_{k\,k+q}$ である)。先述の $0 < \left|a^{(m)}\right| < 1$ の場合と同様，条件式 (D.24) の 2 番目の式からは式 (D.18) と (D.19) において $a^{(m)} = 0$ とおいた式が得られる。このときこれらの式の右辺は互いに同じになるので，式 (D.26) より，$M^{(m)[1]\dagger}_{k+1\,k}M^{(m)[1]}_{k+1\,k}$ は対角型になることが分かる。すると式 (D.23) の第 1 式より，この基底においては $M^{(m)[-1]\dagger}_{k-1\,k}M^{(m)[-1]}_{k-1\,k}$ もまた対角型であることが分かる。以上から，付録 G に示した議論より，

$$M^{(m)[1]}_{k\,k-1} = \begin{pmatrix} U'^{(m)}_k & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{(m)[-1]}_{k-1\,k} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & U''^{(m)\dagger}_k \end{pmatrix}, \tag{D.28}$$

と書けることが帰結する。ここで $U'^{(m)}_k$ と $U''^{(m)}_k$ はそれぞれ $r^{(m)}_k \times r^{(m)}_k$ および $(n^{(m)}_k - r^{(m)}_k) \times (n^{(m)}_k - r^{(m)}_k)$ のユニタリ行列である。

すると，$a^{(m)} = 0$ であるような $T^{(m)}_1$ については，式 (D.12) と同様な形の行列 2 つを対角ブロックとしたブロック対角型行列へと並べ替えることができる。その 2 つのうち 1 つは式 (D.12) において $a^{(m)} = 0$ および $M^{(m)[-1]}_{k-1\,k} = 0$ とおき，n_k を r_k で置き換えたものであり，もう 1 つは $a^{(m)} = 0$ および $M^{(m)[1]}_{k\,k-1} = 0$ とおき，n_k を $n_k - r_k$ で置き換えたものである。$R^{(m)}_0$ のほうもそれに対応して並び替えられる。

ユニタリ行列 $U'^{(m)}_k$ と $U''^{(m)}_k$ の自由度を利用し，先述の式 (D.20) のときのようなユニタリ変換を行うと，そこで最終的に得られたのと同様の形の $T^{(m)}_1$ が得られる。ここでは式 (D.20) において $a^{(m)} = 0$，$\hat{M}^{(m)[q]} = I_{r^{(m)}}$，$\hat{M}^{(m)[-q]} = 0$ とおいたものとなる。

E　$T^2/\mathbb{Z}_4$ におけるひねり行列のブロック対角化の詳細

ここでは 3.6 で述べた $T^2/\mathbb{Z}_4$ におけるひねり行列のブロック対角化について，その計算の詳細を記述する。

一般性を失うことなく，以下に示すような R_0 と T_1 から議論を始めることができる：

$$R_0 = \begin{pmatrix} iI_{n_1} & & & \\ & -I_{n_2} & & \\ & & -iI_{n_3} & \\ & & & I_{n_4} \end{pmatrix}, \qquad T_1 = \begin{pmatrix} (T_1)_{(11)} & (T_1)_{(12)} & (T_1)_{(13)} & (T_1)_{(14)} \\ (T_1)_{(21)} & (T_1)_{(22)} & (T_1)_{(23)} & (T_1)_{(24)} \\ (T_1)_{(31)} & (T_1)_{(32)} & (T_1)_{(33)} & (T_1)_{(34)} \\ (T_1)_{(41)} & (T_1)_{(42)} & (T_1)_{(43)} & (T_1)_{(44)} \end{pmatrix}. \tag{E.1}$$

ここで I_{n_k} は $n_k \times n_k$ 単位行列であり，$(T_1)_{(kl)}$ は $n_k \times n_l$ 部分行列である。これらの部分行列を $(T_1)_{(kl)} = M^{[k-l]}_{k\,l}$ と表すことにする。$M^{[k-l]}_{k\,l}$ については $k' = k \pmod 4$ および $l' = l \pmod 4$ として $M^{[k-l]}_{k\,l} = M^{[k'-l']}_{k\,l} = M^{[k-l]}_{k'\,l'}$ とする記法を用いる。上付き添字の $k - l = q$ は R_0 によって生成される $\mathbb{Z}_4$ 対称性のチャージを表す。すなわち $(R_0 T_1 R_0^{-1})_{(k\,k-q)} = i^q M^{[q]}_{k\,k-q}$ である。n_k のように行列のサイズを表す変数は非負の整数であり，それはこれ以降の数式でも同様である。

E.1　T_1 のブロック対角化と，部分行列間の相互依存関係

まず，3.3 節で述べたように，T_1 が満たすべき関係式 $T_1^\dagger = T_1^{-1}$，$T_{m'} T_m = T_m T_{m'}$，$T_1 T_3 = I$ から T_1 の形が制限され，そして T_1 の各部分行列間に成立する関係式が導かれる。なお 3.3 節の式 (3.27) で示したように，$T_m = R_0^{m-1} T_1 R_0^{1-m}$ である。

$T_1^\dagger (= T_1^{-1} = T_3) = R_0^2 T_1 R_0^{-2}$ という関係式からは，

$$M^{[-q]\dagger}_{k-q\,k} = (-1)^q M^{[q]}_{k\,k-q}, \tag{E.2}$$

が導かれる。式 (E.2) で $q = 0$ とおくと $M^{[0]\dagger}_{k\,k} = M^{[0]}_{k\,k}$ であるから，$M^{[0]}_{k\,k}$ はエルミート行列であり，したがって適当なユニタリ変換により対角化される。このユニタリ変換に際し R_0 は変化しない。$M^{[0]}_{k\,k}$ の (i, j) 成分を $(M^{[0]}_{k\,k})_{ij}$ と書くと，$M^{[0]}_{k\,k}$ は $(M^{[0]}_{k\,k})_{ij} = a^i_k \delta_{ij}$ $(a^i_k \in \mathbb{R})$ と書ける。

$T_{m'} T_m = T_m T_{m'}$，すなわち $T_1 R_0^{m-m'} T_1 = R_0^{m-m'} T_1 R_0^{m'-m} T_1 R_0^{m-m'}$ からは，

$$M^{[q']}_{k\,k-q'} M^{[q-q']}_{k-q'\,k-q} = M^{[q-q']}_{k\,k-q+q'} M^{[q']}_{k-q+q'\,k-q}, \tag{E.3}$$

が導かれる。導出の詳細は付録 H に示す。ここで $q' = 0$ とおき，$(M^{[0]}_{k\,k})_{ij} = a^i_k \delta_{ij}$ を用いると，

$$(a^i_k - a^j_{k-q})(M^{[q]}_{k\,k-q})_{ij} = 0, \tag{E.4}$$

が得られる。これまでの節と同様，この関係が成り立っていると T_1 は行列の並び替えによってブロック対角型行列にできる。その際に R_0 の対角要素の並び順は変わるが，対角行列であるという点では変わらない。結果として両者は次のように書ける：

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_0^{(1)} & & & \\ & R_0^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_0^{(M)} \end{pmatrix}, \qquad T_1 = \begin{pmatrix} T_1^{(1)} & & & \\ & T_1^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_1^{(M)} \end{pmatrix}. \tag{E.5}$$

ここで $R_0^{(m)}$ および $T_1^{(m)}$ $(m = 1, 2, \cdots, M)$ は $n^{(m)} \times n^{(m)}$ 行列であり，それぞれ

$$R_0^{(m)} = \begin{pmatrix} iI_{n_1^{(m)}} & & & \\ & -I_{n_2^{(m)}} & & \\ & & -iI_{n_3^{(m)}} & \\ & & & I_{n_4^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{E.6}$$

および

$$T_1^{(m)} = \begin{pmatrix} a^{(m)} I_{n_1^{(m)}} & M_{1\,2}^{(m)[-1]} & M_{1\,3}^{(m)[-2]} & M_{1\,4}^{(m)[1]} \\ M_{2\,1}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_2^{(m)}} & M_{2\,3}^{(m)[-1]} & M_{2\,4}^{(m)[-2]} \\ M_{3\,1}^{(m)[2]} & M_{3\,2}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_3^{(m)}} & M_{3\,4}^{(m)[-1]} \\ M_{4\,1}^{(m)[-1]} & M_{4\,2}^{(m)[2]} & M_{4\,3}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_4^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{E.7}$$

と書ける。ここで $n^{(m)} = \sum_{k=1}^{4} n_k^{(m)}$ であり，また $T_1^{(m)}$ の部分行列は非対角ブロックのものを $(T_1^{(m)})_{(kl)} = M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$，対角ブロックのものを $(T_1^{(m)})_{(kk)} = M_{k\,k}^{(m)[0]} = a^{(m)} I_{n_k^{(m)}}$ と書いた。$a^{(m)}$ は実数パラメータであり，$m \neq m'$ のとき $a^{(m)} \neq a^{(m')}$ である。各部分行列は，$T_1^\dagger = T_3$ および $T_{m'} T_m = T_m T_{m'}$ から導かれる関係式，

$$M_{k-q\,k}^{(m)[-q]\dagger} = (-1)^q M_{k\,k-q}^{(m)[q]}, \tag{E.8}$$

$$M_{k\,k-q'}^{(m)[q']} M_{k-q'\,k-q}^{(m)[q-q']} = M_{k\,k-q+q'}^{(m)[q-q']} M_{k-q+q'\,k-q}^{(m)[q']}, \tag{E.9}$$

を満たす。

$T_1 T_3 = T_1 R_0^2 T_1 R_0^{-2} = I$ からは，

$$\sum_{q'} (-1)^{q-q'} M_{k\,k-q'}^{(m)[q']} M_{k-q'\,k-q}^{(m)[q-q']} = \delta_{k\,k-q} I_{n_k^{(m)}}, \tag{E.10}$$

が導かれる。q' の和は連続する 4 つの整数についてとる。式 (E.10) で $q = 0$ または $q = 2$ とおき，式 (E.8) と (E.9) を用いて整理すると，それぞれ，

$$2 M_{k\,k-1}^{(m)[1]} M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger} + M_{k\,k-2}^{(m)[2]} M_{k\,k-2}^{(m)[2]\dagger} = \left(1 - a^{(m)2}\right) I_{n_k^{(m)}}, \qquad \text{for } q = 0, \tag{E.11}$$

$$2a^{(m)}M^{(m)[2]}_{k\,k-2} = M^{(m)[1]}_{k\,k-1}M^{(m)[1]}_{k-1\,k-2} + M^{(m)[-1]}_{k\,k+1}M^{(m)[-1]}_{k+1\,k-2}, \qquad \text{for } q = 2, \tag{E.12}$$

が得られる。$q = 1$ または $q = 3$ とおいた場合は，式 (E.9) を適当に線型結合した式が得られ，したがって式 (E.9) から独立した新しい関係式ではないので省略した。式 (E.11) から $0 \leq a^{(m)2} \leq 1$ であることが分かる。$a^{(m)} = \pm 1$ の場合は $T^{(m)}_1$ はすでに対角型である。その場合 $R^{(m)}_0$ および $T^{(m)}_1$ の部分行列はそれぞれ $a^{(m)} = \pm 1$ に対し $(R^{(m)}_0)_{(kl)} = i^k \delta_{kl} I_{n^{(m)}_k}$ および $(T^{(m)}_1)_{(kl)} = \pm \delta_{kl} I_{n^{(m)}_k}$（複号同順）と書ける。以下では $-1 < a^{(m)} < 1$ の場合について調べていく。

E.2 $M^{(m)[k-l]}_{k\,l}$ に対する制限

次に，上で得られた諸関係式を用いて，$M^{(m)[k-l]}_{k\,l}$ の形を制限していく。

一般に大きさ $n \times m$，階数 r の任意の複素行列 A について，$AA^\dagger$ はエルミート行列であり，これは適当なユニタリ行列で対角化できるとともに，行列の並び替えによって $(AA^\dagger)'_{\mathrm{D}} \oplus \mathbf{0}$ と書ける形になる。ここで $(AA^\dagger)'_{\mathrm{D}}$ は正の実数を成分とする $r \times r$ 対角行列であり，$\mathbf{0}$ は $(n-r) \times (n-r)$ 零行列である。ここで $(AA^\dagger)'_{\mathrm{D}} = (A^\dagger A)'_{\mathrm{D}}$ が成り立つことに着目し，付録 G で示した議論を適用すると，行列 A は $r \times r$ 対角行列 $\hat{A}_r$ と $r \times r$ ユニタリ行列 U，そして $(n-r) \times (m-r)$ 零行列 $\mathbf{0}$ を用いて $A = \hat{A}_r U \oplus \mathbf{0}$ と書ける。また U は $\hat{A}_r$ と交換し，$[\hat{A}_r, U] = 0$ である。

式 (E.8) を用いると，式 (E.9) において $q = 0$ とおいたものは

$$M^{(m)[q']}_{k\,k-q'}M^{(m)[q']\dagger}_{k\,k-q'} = M^{(m)[q']\dagger}_{k+q'\,k}M^{(m)[q']}_{k+q'\,k}, \tag{E.13}$$

と書き直せる。また各部分行列やそれらの積における階数について，

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(M^{(m)[q']}_{k\,k-q'}) &= \mathrm{rank}(M^{(m)[q']\dagger}_{k\,k-q'}) = \mathrm{rank}(M^{(m)[q']}_{k\,k-q'}M^{(m)[q']\dagger}_{k\,k-q'}) \\ &= \mathrm{rank}(M^{(m)[q']\dagger}_{k+q'\,k}M^{(m)[q']}_{k+q'\,k}) = \mathrm{rank}(M^{(m)[q']}_{k+q'\,k}),\end{aligned} \tag{E.14}$$

が成り立つ。他方，式 (E.11) より $M^{(m)[1]}_{k\,k-1}M^{(m)[1]\dagger}_{k\,k-1}$ と $M^{(m)[2]}_{k\,k-2}M^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2}$ は，どちらか一方が対角化されたならば他方も同時に対角化されなければならないことが分かる。そこでそれらを同時対角化するユニタリ行列を $W^{(m)}_k$ とおくと，

$$\left(W^{(m)}_k M^{(m)[q']}_{k\,k-q'}M^{(m)[q']\dagger}_{k\,k-q'}W^{(m)\dagger}_k\right)_{\mathrm{R}} = \left(M^{(m)[q']}_{k\,k-q'}M^{(m)[q']\dagger}_{k\,k-q'}\right)'_{\mathrm{D}} \oplus \mathbf{0}, \quad (q' = 1, 2), \tag{E.15}$$

という式が書ける。ここで $(\cdots)_{\mathrm{R}}$ はその行列に対して適当な行と列の並び替えを行うという意味で用いた。また式 (E.13) より，そのユニタリ変換と同時に $M^{(m)[q']\dagger}_{k+q'\,k}M^{(m)[q']}_{k+q'\,k}$ もまた

$$\left(W^{(m)}_k M^{(m)[q']\dagger}_{k+q'\,k}M^{(m)[q']}_{k+q'\,k}W^{(m)\dagger}_k\right)_{\mathrm{R}} = \left(M^{(m)[q']\dagger}_{k+q'\,k}M^{(m)[q']}_{k+q'\,k}\right)'_{\mathrm{D}} \oplus \mathbf{0}, \quad (q' = 1, 2), \tag{E.16}$$

となることが分かる。そして

$$\left(M_{k\,k-q'}^{(m)[q']}M_{k\,k-q'}^{(m)[q']\dagger}\right)'_{\mathrm{D}}=\left(M_{k+q'\,k}^{(m)[q']\dagger}M_{k+q'\,k}^{(m)[q']}\right)'_{\mathrm{D}}\quad(q'=1,2),\tag{E.17}$$

が得られる。他方，式 (E.15) で k を $k+q'$ におきかえ，式 (E.16) で k を $k-q'$ におきかえると，

$$\left(W_{k+q'}^{(m)}M_{k+q'\,k}^{(m)[q']}M_{k+q'\,k}^{(m)[q']\dagger}W_{k+q'}^{(m)\dagger}\right)_{\mathrm{R}}=\left(M_{k+q'\,k}^{(m)[q']}M_{k+q'\,k}^{(m)[q']\dagger}\right)'_{\mathrm{D}}\oplus\mathbf{0},\quad(q'=1,2),\tag{E.18}$$

および

$$\left(W_{k-q'}^{(m)}M_{k\,k-q'}^{(m)[q']\dagger}M_{k\,k-q'}^{(m)[q']}W_{k-q'}^{(m)\dagger}\right)_{\mathrm{R}}=\left(M_{k\,k-q'}^{(m)[q']\dagger}M_{k\,k-q'}^{(m)[q']}\right)'_{\mathrm{D}}\oplus\mathbf{0},\quad(q'=1,2),\tag{E.19}$$

が得られる。すると式 (E.15) と (E.19) を比較して付録 G の式 (G.3) を応用することで

$$\left(M_{k\,k-q'}^{(m)[q']}M_{k\,k-q'}^{(m)[q']\dagger}\right)'_{\mathrm{D}}=\left(M_{k\,k-q'}^{(m)[q']\dagger}M_{k\,k-q'}^{(m)[q']}\right)'_{\mathrm{D}},\tag{E.20}$$

が導かれる。同様に式 (E.16) と (E.18) から

$$\left(M_{k+q'\,k}^{(m)[q']\dagger}M_{k+q'\,k}^{(m)[q']}\right)'_{\mathrm{D}}=\left(M_{k+q'\,k}^{(m)[q']}M_{k+q'\,k}^{(m)[q']\dagger}\right)'_{\mathrm{D}},\tag{E.21}$$

が導かれる。したがって式 (E.17) を用いると，

$$\left(M_{k\,k-q'}^{(m)[q']}M_{k\,k-q'}^{(m)[q']\dagger}\right)'_{\mathrm{D}}=\left(M_{k+q'\,k}^{(m)[q']}M_{k+q'\,k}^{(m)[q']\dagger}\right)'_{\mathrm{D}}\quad(q'=1,2).\tag{E.22}$$

が得られる。なお式 (E.15) において $q'=1$ のときに行われる行列並び替えと $q'=2$ のときに行われる行列並び替えとは一般に異なるが，そこで各 q' に対して行われる並び替えは，式 (E.16)，(E.18)，(E.19) において同じ q' を持った場合に対しても同様に適用される。式 (E.15) と (E.19) から，積 $M_{k\,k-q'}^{(m)[q']}M_{k\,k-q'}^{(m)[q']\dagger}$ と $M_{k\,k-q'}^{(m)[q']\dagger}M_{k\,k-q'}^{(m)[q']}$ $(q'=1,2)$ は，$T_1^{(m)}$ の各部分行列に対しバイユニタリ変換 $W_k^{(m)}M_{k\,k-q'}^{(m)[q']}W_{k-q'}^{(m)\dagger}$ を実現するようなユニタリ変換を行うことにより，$R_0^{(m)}$ および $M_{k\,k}^{(m)[0]}$ を不変に保ったまま同時対角化されることが分かる。$W_k^{(m)}$ $(k=1,2,3,4)$ を対角に並べたブロック対角型のユニタリ行列を用いて $T_1^{(m)}$ に対するユニタリ変換を行えば，すべての k に対して同時にそれが達成される。そこで以下では，実際にそのような変換が行われ，それらの積が対角行列になるような基底に移ったとする。

式 (E.22) を，$q'=1$ から出発して順次使用していくと，

$$\begin{aligned}&\left(M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger}\right)'_{\mathrm{D}}=\left(M_{k+1\,k}^{(m)[1]}M_{k+1\,k}^{(m)[1]\dagger}\right)'_{\mathrm{D}}=\left(M_{k+2\,k+1}^{(m)[1]}M_{k+2\,k+1}^{(m)[1]\dagger}\right)'_{\mathrm{D}}\\&=\left(M_{k+3\,k+2}^{(m)[1]}M_{k+3\,k+2}^{(m)[1]\dagger}\right)'_{\mathrm{D}},\end{aligned}\tag{E.23}$$

が得られる。式 (E.23) から，$\left(M^{(m)[1]}_{k\,k-1}M^{(m)[1]\dagger}_{k\,k-1}\right)'_{\mathrm{D}}$ が k に依らないこと，また $M^{(m)[1]}_{k\,k-1}$ がすべて同じ階数 $r^{(m)}(=\mathrm{rank}(M^{(m)[1]}_{k\,k-1}))$ を持つことが分かる。すると付録 G の議論を適用することで，

$$M^{(m)[1]}_{k\,k-1} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{M}^{(m)[1]}U^{(m)}_{k\,k-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \tag{E.24}$$

と変換することができる（$M^{(m)[1]}_{k\,k-1}$ がそのように表示されるような基底に移ることができる）。ここで $\hat{M}^{(m)[1]}$ は正の実数を成分にもつ $r^{(m)}\times r^{(m)}$ 対角行列，すなわち $(\hat{M}^{(m)[1]})_{ii}>0$ と書かれるような行列であり，$U^{(m)}_{k\,k-1}$ は式 (G.5) の U と同様にブロック対角型の $r^{(m)}\times r^{(m)}$ ユニタリ行列である。$r^{(m)}$ は $M^{(m)[1]}_{k\,k-1}$ の階数である。周辺の零行列は $r^{(m)}<n^{(m)}_k$ の場合に現れる。$r^{(m)}=n^{(m)}_k$ であれば $M^{(m)[1]}_{k\,k-1}=\hat{M}^{(m)[1]}U^{(m)}_{k\,k-1}$ である。$\hat{M}^{(m)[1]}$ はすべての k について共通であるが，$U^{(m)}_{k\,k-1}$ は一般には k ごとに異なる。また周辺の零行列ブロックも一般には k ごとにサイズが異なる。式 (E.8) と (E.24) からは，

$$M^{(m)[-1]}_{k-1\,k} = -M^{(m)[1]\dagger}_{k\,k-1} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{M}^{(m)[1]}U^{(m)}_{k-1\,k} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \tag{E.25}$$

が導かれる。ここで式 (E.8) より $-U^{(m)\dagger}_{k\,k-1}$ を $U^{(m)}_{k-1\,k}$ と表した。

他方，この基底のもとでの $M^{(m)[2]}_{k\,k-2}$（$=M^{(m)[-2]}_{k\,k-2}$）は次のようになる（$M^{(m)[2]}_{k\,k-2}=M^{(m)[-2]}_{k\,k-2}$ であることについては式 (E.1) の下で述べた $M^{(m)[k-l]}_{k\,l}$ の記法参照）。まず式 (E.14) と (E.22) で $q'=2$ とおいたものから，

$$\mathrm{rank}(M^{(m)[2]}_{k\,k-2}) = \mathrm{rank}(M^{(m)[2]}_{k+2\,k}), \tag{E.26}$$

$$\left(M^{(m)[2]}_{k\,k-2}M^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2}\right)'_{\mathrm{D}} = \left(M^{(m)[2]}_{k+2\,k}M^{(m)[2]\dagger}_{k+2\,k}\right)'_{\mathrm{D}}, \tag{E.27}$$

が導かれる。そして式 (E.11) を参照し，今の基底で $M^{(m)[1]}_{k\,k-1}M^{(m)[1]\dagger}_{k\,k-1}=(\hat{M}^{(m)[1]})^2\oplus\mathbf{0}$ であることを用いると，$\left(M^{(m)[2]}_{k\,k-2}M^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2}\right)'_{\mathrm{D}}$ の中で $(\hat{M}^{(m)[1]})^2$ に対応する部分はやはり k に依らず一定に決まるものであること，また $M^{(m)[2]}_{k\,k-2}M^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2}$ も対角型であることが分かる。したがって

$M^{(m)[2]}_{k\,k-2}$ （$=M^{(m)[-2]}_{k\,k-2}$）は

$$M^{(m)[2]}_{k\,k-2}=M^{(m)[-2]}_{k\,k-2}=\left(\begin{array}{c|c}\hat{M}^{(m)[2]}U^{(m)}_{k\,k-2} & 0\\ \hline 0 & \sqrt{1-a^{(m)2}}\,\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}\end{array}\right), \tag{E.28}$$

のように書けることが分かる。ここで $\hat{M}^{(m)[2]}$ は非負の実数を成分にもつ $r^{(m)}\times r^{(m)}$ 対角行列であり，$(\hat{M}^{(m)[2]})_{ii}\geq 0$ と書ける。$\hat{M}^{(m)[1]}$ との違いは，こちらでは正の実数だけでなくゼロも成分に持ちうるということである。$U^{(m)}_{k\,k-2}$ は $r^{(m)}\times r^{(m)}$ ユニタリ行列であり，$U^{(m)}_{k\,k-2}U^{(m)}_{k-2\,k}=U^{(m)}_{k-2\,k}U^{(m)}_{k\,k-2}=I_{r^{(m)}}$ を満たす。式 (E.8) より $U^{(m)}_{k-2\,k}=U^{(m)\dagger}_{k\,k-2}$ である。同様に $(2,2)$ ブロックの $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ についても $\tilde{U}^{(m)}_{k-2\,k}=\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k\,k-2}$ と書くことにする。式 (E.11) と (E.28) より $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k\,k-2}=I_{n^{(m)}_k-r^{(m)}}\equiv I_{n^{(m)\prime}_k}$ である。一般に $n^{(m)}_k\neq n^{(m)}_{k-2}$ だと $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ はユニタリ行列とは限らないが，しかし今の場合，ひねり行列に対する他の制約条件との整合性から常に $n^{(m)}_k=n^{(m)}_{k-2}$ でなければならず，したがって $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ は $n^{(m)\prime}_k\times n^{(m)\prime}_k$ のユニタリ行列であることが次のようにして分かる。まず $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k\,k-2}=I_{n^{(m)\prime}_k}$ で k を $k+2$ で置き換えると $\tilde{U}^{(m)}_{k+2\,k}\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k+2\,k}=I_{n^{(m)\prime}_{k+2}}$ を得る。ここで $n^{(m)\prime}_{k+2}=n^{(m)}_{k+2}-r^{(m)}$ である。したがって

$$\mathrm{rank}(M^{(m)[2]}_{k\,k-2})=\mathrm{rank}(\hat{M}^{(m)[2]})+n^{(m)\prime}_k,\quad \mathrm{rank}(M^{(m)[2]}_{k+2\,k})=\mathrm{rank}(\hat{M}^{(m)[2]})+n^{(m)\prime}_{k+2}, \tag{E.29}$$

という関係式が得られる。すると式 (E.26) と (E.29) より $n^{(m)\prime}_k=n^{(m)\prime}_{k+2}$ であるから，$n^{(m)\prime}_1=n^{(m)\prime}_3$ および $n^{(m)\prime}_2=n^{(m)\prime}_4$ である。したがって $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ は $n^{(m)\prime}_k\times n^{(m)\prime}_k$ のユニタリ行列である。さらに，$n^{(m)}_1=n^{(m)}_3$ および $n^{(m)}_2=n^{(m)}_4$ であるから $M^{(m)[2]}_{k\,k-2}$ は $n^{(m)}_k\times n^{(m)}_1$ の正方行列であることも分かる。ただし，このあと式 (E.36) のところで見るように，$\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ および周辺のブロックが現れるのは実は $a^{(m)}=0$ のときのみである。したがって実は式 (E.28) で $\sqrt{1-a^{(m)2}}$ の部分はなくてもよいのであるが，ここでは導出の流れを分かりやすくするために書いた。

式 (E.24)，(E.25)，(E.28) を (E.11) に代入すると，

$$2(\hat{M}^{(m)[1]})^2+(\hat{M}^{(m)[2]})^2=\left(1-a^{(m)2}\right)I_{r^{(m)}}, \tag{E.30}$$

が得られる。式 (E.30) から，$[\hat{M}^{(m)[q]},U^{(m)}_{k\,k-q'}]=0$ が q と q' の値に関係なく成り立つことが次のようにして導かれる。まず式 (E.30) から，$\hat{M}^{(m)[1]}$ の中に対角成分が縮退している部分があると $\hat{M}^{(m)[2]}$ の中でそれに対応する部分も縮退することが分かる。より具体的に言えば，いま $\hat{M}^{(m)[1]}$ は一般に付録 G の式 (G.2) のように書ける形になっているが，ここではある成分 a_j が縮退しているとそれに対応する I_{n_j} の大きさ n_j が 1 より大きくなり，その部分は単位行列に比例したブ

ロックとして書かれるようになっている（$\hat{A}_r$ の固有値に縮退があるとき，適宜に行列の並び替えを行って，それら同一の値を持つ成分同士が対角線上の隣り合う位置に並ぶようにしてある。言い換えれば，そのように基底を選んである）。そのとき式 (E.30) より，$\hat{M}^{(m)[2]}$ でもそれに対応する部分が同じ大きさの単位行列（もしくは零行列）に比例したブロックとして書かれる，ということである。他方，付録 G の式 (G.5) に対応して $\hat{M}^{(m)[q]}U^{(m)}_{k\,k-q}$ $(q=1,2)$ はブロック対角型行列でありその (k',l') ブロックにあたる部分行列は $(\hat{M}^{(m)[q]}U^{(m)}_{k\,k-q})_{(k'l')} = m^{(m)[q]}_{k'}u^{(m,k')}_{k\,k-q}\delta_{k'l'}$ と書かれる。ここで $m^{(m)[q]}_{k'}$ は上述の a_j に相当するものでここでは非負の実数であり，その縮退度を n'_k とすると $u^{(m,k')}_{k\,k-q}$ は大きさ $n'_k \times n'_k$ のユニタリ行列である。$n'_k = 1$ ならば行列というよりも絶対値 1 の複素数である。すると $[\hat{M}^{(m)[q]}, U^{(m)}_{k\,k-q'}] = 0$ が q と q' の値に関係なく成り立つことが導かれる。なぜなら $u^{(m,k')}_{k\,k-q'}$ が複素数の部分ではそれが $m^{(m)[q]}_{k'}$ と交換することは自明であるし，$u^{(m,k')}_{k\,k-q'}$ が行列である部分でも $\hat{M}^{(m)[q]}$ のほうでそれに対応する部分は $m^{(m)[q]}_{k'}I_{n'_k}$ であり $[m^{(m)[q]}_{k'}I_{n'_k}, u^{(m,k')}_{k\,k-q'}] = 0$だからである。なお，$\hat{M}^{(m)[0]} = a^{(m)}I_{r^{(m)}}$，$U^{(m)}_{k\,k} = I_{r^{(m)}}$，$\hat{M}^{(m)[-q]} = \hat{M}^{(m)[q]}$，$U^{(m)}_{k-q\,k} = (-1)^q U^{(m)\dagger}_{k\,k-q}$ である。

式 (E.24)，(E.25)，(E.28) を (E.9) に代入すると，$U^{(m)}_{k\,k-q'}U^{(m)}_{k-q'\,k-q} = U^{(m)}_{k\,k-q+q'}U^{(m)}_{k-q+q'\,k-q}$ が得られる。後の便のため下付き添字を適当に調整して書き直すと，

$$U^{(m)}_{k-q\,k-q-q'}U^{(m)}_{k-q-q'\,k} = U^{(m)}_{k-q\,k+q'}U^{(m)}_{k+q'\,k} \quad \text{and} \quad U^{(m)}_{k\,k-q'}U^{(m)}_{k-q'\,k+q} = U^{(m)}_{k\,k+q+q'}U^{(m)}_{k+q+q'\,k+q}, \tag{E.31}$$

となる。一番目の式では k および q を $k-q$ および $-q$ で置き換え，二番目の式では q だけを $-q$ に置き換えた。厳密に言うと，式 (E.31) の関係式によって $U^{(m)}_{k\,k-q}$ の形を制限できるのは $m^{(m)[2]}_{k'} = 0$ に対応する部分以外の部分に対してのみである。$m^{(m)[2]}_{k'} = 0$ の部分については，$U^{(m)}_{k\,k-q}$ の方でその部分に対応する部分行列 $u^{(m,k')}_{k\,k-q}$ は任意となるからである。しかしその任意性を逆手にとって，以下ではそこの $u^{(m,k')}_{k\,k-q}$ もまた式 (E.31) の関係を満たすように選ぶことにする。

式 (E.31) の一番目の関係式に左から $U^{(m)}_{k\,k-q}$ をかけ，二番目の関係式に右から $U^{(m)}_{k+q\,k}$ をかけると，

$$U^{(m)}_{k\,k-q}U^{(m)}_{k-q\,k-q-q'}U^{(m)}_{k-q-q'\,k} = U^{(m)}_{k\,k-q}U^{(m)}_{k-q\,k+q'}U^{(m)}_{k+q'\,k}, \tag{E.32}$$

$$U^{(m)}_{k\,k-q'}U^{(m)}_{k-q'\,k+q}U^{(m)}_{k+q\,k} = U^{(m)}_{k\,k+q+q'}U^{(m)}_{k+q+q'\,k+q}U^{(m)}_{k+q\,k}, \tag{E.33}$$

が得られる。式 (E.32) と (E.33) を用いると，

$$J^{(m)}_{kk} \equiv U^{(m)}_{k\,k-1}U^{(m)}_{k-1\,k-2}U^{(m)}_{k-2\,k} = U^{(m)}_{k\,k-1}U^{(m)}_{k-1\,k+1}U^{(m)}_{k+1\,k} = U^{(m)}_{k\,k+2}U^{(m)}_{k+2\,k+1}U^{(m)}_{k+1\,k}, \tag{E.34}$$

が得られる。他方，式 (E.24)，(E.25)，(E.28) を (E.12) に代入すると，

$$2a^{(m)}\hat{M}^{(m)[2]} = (\hat{M}^{(m)[1]})^2(J_{kk}^{(m)} + J_{kk}^{(m)\dagger}), \tag{E.35}$$

$$2a^{(m)}\sqrt{1-a^{(m)2}}\,\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)} = \mathbf{0}, \tag{E.36}$$

が得られる。式 (E.36) からは，$-1 < a^{(m)} < 1$ の場合 $\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)}$ の大きさは $n_k^{(m)\prime} = 0$ であるということ，つまり $\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)}$ は現れないことが帰結する。なぜならば式 (E.28) のところで述べたように $\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)}$ は $M_{k\,k-2}^{(m)[2]}$ の階数 $r^{(m)}$ がそのサイズ $n_k^{(m)}$ より小さい時に，式 (E.11) を満たすために $\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)}\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)\dagger} = I_{n_k^{(m)}-r^{(m)}} \equiv I_{n_k^{(m)\prime}}$ なる行列として現れるものだからであり，したがって零行列という解は許されないためである。逆に言えば，$\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)}$ が現れるのは $a^{(m)} = 0$ のときのみである。なお，$M_{k\,k-2}^{(m)[2]}$ は式 (E.29) の下で述べたように正方行列であるから，$\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)}$ が存在しない場合 $M_{k\,k-2}^{(m)[2]}$ は必ず $M_{k\,k-2}^{(m)[2]} = \hat{M}^{(m)[2]}U_{k\,k-2}^{(m)}$ という正方行列になるが，$M_{k\,k-1}^{(m)[1]}$ のほうでもそれに対応して正方行列にはなるとは限らない。$\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)}$ に対応する $(2,2)$ ブロックの零行列は消えるが，$(1,2)$ ブロックか $(2,1)$ ブロックのどちらか一方の零行列が一般には残され得る。それでも式 (E.11) は満たされるからでる。

以上のようにして $M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ の形は，式 (E.30) と (E.35) を満たす $\hat{M}^{(m)[1]}$ や $\hat{M}^{(m)[2]}$，式 (E.31) と (E.35) を満たす $U_{k\,l}^{(m)}$，そして式 (E.36) を満たす $\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)}$ によって，式 (E.24)，(E.25)，(E.28) のように書かれるものに制限される。

E.3 $T_1^{(m)}$ の部分行列の対角化と並び替え

式 (E.24)，(E.25)，(E.28) に基づき，$R_0^{(m)}$ と $T_1^{(m)}$ に対して適当な行列の並び替え（言い換えれば基底の並び替え）を行うと，それぞれを下記に示すようなブロック行列の直和である $R_0^{(m)} = R_0^{(m)\prime} \oplus R_0^{(m)\prime\prime}$ および $T_1^{(m)} = T_1^{(m)\prime} \oplus T_1^{(m)\prime\prime}$ という形に書くことができる。$R_0^{(m)\prime}$ と $T_1^{(m)\prime}$，また $R_0^{(m)\prime\prime}$ と $T_1^{(m)\prime\prime}$ は，

$$R_0^{(m)\prime} = \begin{pmatrix} iI_{r^{(m)}} & & & \\ & -I_{r^{(m)}} & & \\ & & -iI_{r^{(m)}} & \\ & & & I_{r^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{E.37}$$

$$T_1^{(m)\prime} = \begin{pmatrix} a^{(m)}I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[1]}U_{1\,2}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]}U_{1\,3}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]}U_{1\,4}^{(m)} \\ \hat{M}^{(m)[1]}U_{2\,1}^{(m)} & a^{(m)}I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[1]}U_{2\,3}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]}U_{2\,4}^{(m)} \\ \hat{M}^{(m)[2]}U_{3\,1}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]}U_{3\,2}^{(m)} & a^{(m)}I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[1]}U_{3\,4}^{(m)} \\ \hat{M}^{(m)[1]}U_{4\,1}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]}U_{4\,2}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]}U_{4\,3}^{(m)} & a^{(m)}I_{r^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{E.38}$$

$$R_0^{(m)''} = \begin{pmatrix} iI_{n_1^{(m)'}} & & & \\ & -I_{n_2^{(m)'}} & & \\ & & -iI_{n_1^{(m)'}} & \\ & & & I_{n_2^{(m)'}} \end{pmatrix}, \tag{E.39}$$

$$T_1^{(m)''} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{U}_{13}^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{U}_{24}^{(m)} \\ \tilde{U}_{31}^{(m)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{U}_{42}^{(m)} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{E.40}$$

である。

次の計算の便のため，式 (E.34) で $k=2$ とおいたものを書きくだしておくと，

$$J_{22}^{(m)} = U_{21}^{(m)} U_{14}^{(m)} U_{42}^{(m)} = U_{21}^{(m)} U_{13}^{(m)} U_{32}^{(m)} = U_{24}^{(m)} U_{43}^{(m)} U_{32}^{(m)}, \tag{E.41}$$

となる。

以上の準備のもとに，以下に示すユニタリ行列 $V^{(m)} = V^{(m)'} \oplus V^{(m)''}$ を用いて $T_1^{(m)}$ に対し $T_1^{(m)} \to V^{(m)} T_1^{(m)} V^{(m)\dagger}$ というユニタリ変換を行う。$V^{(m)'}$ および $V^{(m)''}$ は，

$$V^{(m)'} = \begin{pmatrix} \hat{\Theta}^{(m)[1]\dagger} U^{(m)} U_{21}^{(m)} & & & \\ & U^{(m)} & & \\ & & -\hat{\Theta}^{(m)[1]} U^{(m)} U_{23}^{(m)} & \\ & & & U^{(m)} U_{24}^{(m)} \end{pmatrix}, \tag{E.42}$$

および

$$V^{(m)''} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{31}^{(m)} & & & \\ & \tilde{U}_{42}^{(m)} & & \\ & & I_{n_1^{(m)'}} & \\ & & & I_{n_2^{(m)'}} \end{pmatrix}, \tag{E.43}$$

である。ここで下付き添字なしの $U^{(m)}$ は $J_{22}^{(m)}$ を対角化するユニタリ行列であり，$\hat{J}_{22}^{(m)} (= U^{(m)} J_{22}^{(m)} U^{(m)\dagger})$ は対角化された $J_{22}^{(m)}$ である。そして $\hat{\Theta}^{(m)[1]}$ は二乗すると $\hat{J}_{22}^{(m)}$ に一致するような対角行列（つまりその各成分が $\hat{J}_{22}^{(m)}$ における対応する各成分の平方根であるような対角行列）である。$U_{k\,k-q}^{(m)}$ が $\hat{M}^{(m)[1]}$ および $\hat{M}^{(m)[2]}$ と交換するというのと同じ理由で，$U^{(m)}$ もまたそれらと交換する。つまり，$J_{22}^{(m)}$ もまた $U_{k\,k-q}^{(m)}$ と同様にブロック対角型行列でありその対角ブロックの中には対角型でない部分行列がありうるが，そしてそのために $U^{(m)}$ においてそこに対応している部分行列もまた一般に対角型とは限らないが，$\hat{M}^{(m)[1]}$ および $\hat{M}^{(m)[2]}$ においてそこに対応している部分行列は単位行列に比例した行列になっているため，結局 $U^{(m)}$ もまた

$\hat{M}^{(m)[1]}$ および $\hat{M}^{(m)[2]}$ と交換する。その結果，このユニタリ変換に伴い $R_0^{(m)\prime}$ および $R_0^{(m)\prime\prime}$ が不変に保たれるのと同時に，$T_1^{(m)\prime}$ および $T_1^{(m)\prime\prime}$ は，

$$
\begin{aligned}
&V^{(m)\prime}T_1^{(m)\prime}V^{(m)\prime\dagger} \\
&= \begin{pmatrix}
a^{(m)}I_{r^{(m)}} & -\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]\dagger} & \hat{M}^{(m)[2]} & \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]} \\
\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]} & a^{(m)}I_{r^{(m)}} & -\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]\dagger} & \hat{M}^{(m)[2]} \\
\hat{M}^{(m)[2]} & \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]} & a^{(m)}I_{r^{(m)}} & -\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]\dagger} \\
-\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]\dagger} & \hat{M}^{(m)[2]} & \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]} & a^{(m)}I_{r^{(m)}}
\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{E.44}
$$

および

$$
V^{(m)\prime\prime}T_1^{(m)\prime\prime}V^{(m)\prime\prime\dagger} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & I_{n_1^{(m)\prime}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & I_{n_2^{(m)\prime}} \\
I_{n_1^{(m)\prime}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & I_{n_2^{(m)\prime}} & 0 & 0
\end{pmatrix}, \tag{E.45}
$$

へと変換される。ここで $U^{(m)}_{k\,k-q}$ や $U^{(m)}$ が $\hat{M}^{(m)[1]}$ および $\hat{M}^{(m)[2]}$ と交換するということとともに，$U^{(m)}_{k-q\,k} = (-1)^q U^{(m)\dagger}_{k\,k-q}$，$\tilde{U}^{(m)}_{k-2\,k} = \tilde{U}^{(m)\dagger}_{k\,k-2}$，および式 (E.41) を用いた。このとき式 (E.35) は $\hat{\Theta}^{(m)[1]}$ および $\hat{\Theta}^{(m)[1]\dagger}$ を用いて，

$$
2a^{(m)}\hat{M}^{(m)[2]} = (\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]})^2 + (\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]\dagger})^2, \tag{E.46}
$$

と書かれる。

F　$T^2/\mathbb{Z}_6$ におけるひねり行列のブロック対角化の詳細

ここでは3.7節で示した $T^2/\mathbb{Z}_6$ におけるひねり行列のブロック対角化について，その計算の詳細を説明する。

R_0 および T_1 として，一般性を失うことなく下記の形のものを議論の出発点におくことができる。

$$
R_0 = \begin{pmatrix}
\eta I_{n_1} & & & & & \\
& \eta^2 I_{n_2} & & & & \\
& & -I_{n_3} & & & \\
& & & -\eta I_{n_4} & & \\
& & & & -\eta^2 I_{n_5} & \\
& & & & & I_{n_6}
\end{pmatrix}, \tag{F.1}
$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} (T_1)_{(11)} & (T_1)_{(12)} & (T_1)_{(13)} & (T_1)_{(14)} & (T_1)_{(15)} & (T_1)_{(16)} \\ (T_1)_{(21)} & (T_1)_{(22)} & (T_1)_{(23)} & (T_1)_{(24)} & (T_1)_{(25)} & (T_1)_{(26)} \\ (T_1)_{(31)} & (T_1)_{(32)} & (T_1)_{(33)} & (T_1)_{(34)} & (T_1)_{(35)} & (T_1)_{(36)} \\ (T_1)_{(41)} & (T_1)_{(42)} & (T_1)_{(43)} & (T_1)_{(44)} & (T_1)_{(45)} & (T_1)_{(46)} \\ (T_1)_{(51)} & (T_1)_{(52)} & (T_1)_{(53)} & (T_1)_{(54)} & (T_1)_{(55)} & (T_1)_{(56)} \\ (T_1)_{(61)} & (T_1)_{(62)} & (T_1)_{(63)} & (T_1)_{(64)} & (T_1)_{(65)} & (T_1)_{(66)} \end{pmatrix}. \tag{F.2}$$

ここで $\eta = e^{2\pi i/6}$ であり，I_{n_k} は $n_k \times n_k$ 単位行列であり，$(T_1)_{(kl)}$ は $n_k \times n_l$ 部分行列である。以後の議論では $(T_1)_{(kl)} = M^{[k-l]}_{k\,l}$ と表し，そして $M^{[k-l]}_{k\,l}$ については $M^{[k-l]}_{k\,l} = M^{[k'-l']}_{k\,l} = M^{[k-l]}_{k'\,l'}$ が $k' = k \pmod 6$ および $l' = l \pmod 6$ に対して成り立つという記法を用いる。上付き添字の $k - l = q$ は R_0 によって生成される $\mathbb{Z}_6$ 対称性のチャージを表している。すなわち $(R_0 T_1 R_0^{-1})_{(k\,k-q)} = \eta^q M^{[q]}_{k\,k-q}$ である。ここにおける n_k のように行列のサイズを表すパラメータをこの後もしばしば用いるが，それらはすべて非負の整数である。

F.1　T_1 のブロック対角化と，部分行列間の相互依存関係

$T_1^\dagger = T_1^{-1}$ であること，また $T_m = R_0^{m-1} T_1 R_0^{1-m}$ として $T_{m'} T_m = T_m T_{m'}$，$T_1 T_4 = I$，$T_1 T_3 T_5 = I$（もしくは $T_1 T_3 = T_2$）が満たされるという要請（3.3 節参照）から，T_1 に対して以下のような制約条件が課せられる。まず $T_1^\dagger (= T_1^{-1} = T_4) = R_0^3 T_1 R_0^{-3}$ からは,

$$M^{[-q]\dagger}_{k-q\,k} = (-1)^q M^{[q]}_{k\,k-q}, \tag{F.3}$$

が導かれる。式 (F.3) において $q = 0$ とおくと，$M^{[0]\dagger}_{k\,k} = M^{[0]}_{k\,k}$ が，すなわち $M^{[0]}_{k\,k}$ がエルミート行列であることが導かれ，したがって $M^{[0]}_{k\,k}$ は適当なユニタリ変換によって $(M^{[0]}_{k\,k})_{ij} = a^i_k \delta_{ij}$ ($a^i_k \in \mathbb{R}$) と書ける形に対角化される。$(M^{[0]}_{k\,k})_{ij}$ は $M^{[0]}_{k\,k}$ の (i,j) 成分である。このユニタリ変換に際して R_0 は変化しない。

付録 H に示すように，$T_{m'} T_m = T_m T_{m'}$ すなわち $T_1 R_0^{m-m'} T_1 = R_0^{m-m'} T_1 R_0^{m'-m} T_1 R_0^{m-m'}$ からは,

$$M^{[q']}_{k\,k-q'} M^{[q-q']}_{k-q'\,k-q} = M^{[q-q']}_{k\,k-q+q'} M^{[q']}_{k-q+q'\,k-q}, \tag{F.4}$$

が導かれる。式 (F.4) で $q' = 0$ とおき，また $(M^{[0]}_{k\,k})_{ij} = a^i_k \delta_{ij}$ であることを用いると,

$$(a^i_k - a^j_{k-q})(M^{[q]}_{k\,k-q})_{ij} = 0, \tag{F.5}$$

が得られる。すると T_1 は適当な行列の並び替えによってブロック対角型にできることが分かる。この際 R_0 では対角要素の並び順が変わるが対角行列であるという点では変化しない。こ

の並び替えにより両者は,

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_0^{(1)} & & & \\ & R_0^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_0^{(M)} \end{pmatrix}, \qquad T_1 = \begin{pmatrix} T_1^{(1)} & & & \\ & T_1^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_1^{(M)} \end{pmatrix}, \tag{F.6}$$

という形に書ける。ここで $R_0^{(m)}$ および $T_1^{(m)}$ $(m = 1, 2, \cdots, M)$ は $n^{(m)} \times n^{(m)}$ 行列であり，それぞれ

$$R_0^{(m)} = \begin{pmatrix} \eta I_{n_1^{(m)}} & & & & & \\ & \eta^2 I_{n_2^{(m)}} & & & & \\ & & -I_{n_3^{(m)}} & & & \\ & & & -\eta I_{n_4^{(m)}} & & \\ & & & & -\eta^2 I_{n_5^{(m)}} & \\ & & & & & I_{n_6^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{F.7}$$

および

$$T_1^{(m)} = \begin{pmatrix} a^{(m)} I_{n_1^{(m)}} & M_{1\,2}^{(m)[-1]} & M_{1\,3}^{(m)[-2]} & M_{1\,4}^{(m)[-3]} & M_{1\,5}^{(m)[2]} & M_{1\,6}^{(m)[1]} \\ M_{2\,1}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_2^{(m)}} & M_{2\,3}^{(m)[-1]} & M_{2\,4}^{(m)[-2]} & M_{2\,5}^{(m)[-3]} & M_{2\,6}^{(m)[2]} \\ M_{3\,1}^{(m)[2]} & M_{3\,2}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_3^{(m)}} & M_{3\,4}^{(m)[-1]} & M_{3\,5}^{(m)[-2]} & M_{3\,6}^{(m)[-3]} \\ M_{4\,1}^{(m)[3]} & M_{4\,2}^{(m)[2]} & M_{4\,3}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_4^{(m)}} & M_{4\,5}^{(m)[-1]} & M_{4\,6}^{(m)[-2]} \\ M_{5\,1}^{(m)[-2]} & M_{5\,2}^{(m)[3]} & M_{5\,3}^{(m)[2]} & M_{5\,4}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_5^{(m)}} & M_{5\,6}^{(m)[-1]} \\ M_{6\,1}^{(m)[1]} & M_{6\,2}^{(m)[-2]} & M_{6\,3}^{(m)[3]} & M_{6\,4}^{(m)[2]} & M_{6\,5}^{(m)[1]} & a^{(m)} I_{n_6^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{F.8}$$

と書ける。ここで $n^{(m)} = \sum_{k=1}^{6} n_k^{(m)}$ であり，$T_1^{(m)}$ を構成する部分行列のうち非対角ブロックにある行列は $(T_1^{(m)})_{(kl)} = M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$（$k \neq l$），対角ブロックにある行列は $(T_1^{(m)})_{(kk)} = M_{k\,k}^{(m)[0]} = a^{(m)} I_{n_k^{(m)}}$ と書いた。$a^{(m)}$ は実数パラメータであり $m \neq m'$ に対して $a^{(m)} \neq a^{(m')}$ であるとする。これらの部分行列は，$T_1^\dagger = T_4$ および $T_{m'} T_m = T_m T_{m'}$ から導かれる関係式,

$$M_{k-q\,k}^{(m)[-q]\dagger} = (-1)^q M_{k\,k-q}^{(m)[q]}, \tag{F.9}$$

$$M_{k\,k-q'}^{(m)[q']} M_{k-q'\,k-q}^{(m)[q-q']} = M_{k\,k-q+q'}^{(m)[q-q']} M_{k-q+q'\,k-q}^{(m)[q']}, \tag{F.10}$$

を満たす。また $T_1 T_4 = T_1 R_0^3 T_1 R_0^{-3} = I$ および $T_2 = T_1 T_3$ すなわち $T_1 = R_0^{-1} T_1 R_0^2 T_1 R_0^{-1}$ からは,

$$\sum_{q'} (-1)^{q-q'} M_{k\,k-q'}^{(m)[q']} M_{k-q'\,k-q}^{(m)[q-q']} = \delta_{k\,k-q} I_{n_k^{(m)}}, \tag{F.11}$$

および

$$M^{(m)[q]}_{k\,k-q} = \sum_{q'} \eta^{q-2q'} M^{(m)[q']}_{k\,k-q'} M^{(m)[q-q']}_{k-q'\,k-q}, \tag{F.12}$$

が導かれる。ここで q' についての和は連続する 6 つの整数についてとる（$q' = q'' \pmod 6$ なので任意の連続する 6 つの整数）。式 (F.11) で $q = 0, 2$ とおいたものに式 (F.9) と (F.10) を用いると，

$$2M^{(m)[1]}_{k\,k-1} M^{(m)[1]\dagger}_{k\,k-1} + 2M^{(m)[2]}_{k\,k-2} M^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2} + M^{(m)[3]}_{k\,k-3} M^{(m)[3]\dagger}_{k\,k-3} = \left(1 - a^{(m)2}\right) I_{n^{(m)}_k}, \qquad \text{for } q = 0, \tag{F.13}$$

$$2a^{(m)} M^{(m)[2]}_{k\,k-2} + M^{(m)[-2]}_{k\,k+2} M^{(m)[-2]}_{k+2\,k-2} = M^{(m)[1]}_{k\,k-1} M^{(m)[1]}_{k-1\,k-2} + 2M^{(m)[-1]}_{k\,k+1} M^{(m)[3]}_{k+1\,k-2}, \qquad \text{for } q = 2, \tag{F.14}$$

が得られる。また式 (F.12) で $q = 0, 1, 2, 3$ とおいたものに式 (F.9) と (F.10) を用いると，

$$M^{(m)[1]}_{k\,k-1} M^{(m)[1]\dagger}_{k\,k-1} - M^{(m)[2]}_{k\,k-2} M^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2} - M^{(m)[3]}_{k\,k-3} M^{(m)[3]\dagger}_{k\,k-3} = \left(a^{(m)} - a^{(m)2}\right) I_{n^{(m)}_k}, \qquad \text{for } q = 0, \tag{F.15}$$

$$\left(1 - a^{(m)}\right) M^{(m)[1]}_{k\,k-1} = M^{(m)[3]}_{k\,k-3} M^{(m)[-2]}_{k-3\,k-1} - 2M^{(m)[2]}_{k\,k-2} M^{(m)[-1]}_{k-2\,k-1}, \qquad \text{for } q = 1, \tag{F.16}$$

$$\begin{aligned}\left(1 + a^{(m)}\right) M^{(m)[2]}_{k\,k-2} = {} & M^{(m)[1]}_{k\,k-1} M^{(m)[1]}_{k-1\,k-2} - M^{(m)[-1]}_{k\,k+1} M^{(m)[3]}_{k+1\,k-2} \\ & + M^{(m)[-2]}_{k\,k+2} M^{(m)[-2]}_{k+2\,k-2}, \qquad \text{for } q = 2,\end{aligned} \tag{F.17}$$

$$\left(1 + 2a^{(m)}\right) M^{(m)[3]}_{k\,k-3} = M^{(m)[1]}_{k\,k-1} M^{(m)[2]}_{k-1\,k-3} + M^{(m)[-2]}_{k\,k+2} M^{(m)[-1]}_{k+2\,k-3}, \qquad \text{for } q = 3, \tag{F.18}$$

が得られる。式 (F.11) や (F.12) でこれら以外の q の値をおいたときに得られる式は，これらの式もしくは式 (F.10) と等価なものであり，独立した新しい関係式を与えるものではないのでここでは載せなかった。具体的には，まず式 (F.11) で $q = 1, 3, 5$ とおいた各場合に得られる式は，式 (F.10) を適当に組み合わせることによって得られる式と同じになる。$q = 4$ とおいた場合は式 (F.14) のエルミート共役になる。式 (F.12) で $q = 4$ および $q = 5$ とおいた場合は，それぞれ式 (F.17) および (F.16) のエルミート共役になる。

式 (F.13) から，$0 \leq a^{(m)2} \leq 1$ であることが分かる。$a^{(m)} = \pm 1$ のときはすでに $T^{(m)}_1$ は対角型であり，R_0 および T_1 は $a^{(m)} = \pm 1$ に対してそれぞれ $(R^{(m)}_0)_{(kl)} = \eta^k \delta_{kl} I_{n^{(m)}_k}$ および $(T^{(m)}_1)_{(kl)} = \pm \delta_{kl} I_{n^{(m)}_k}$（複号同順）という $n^{(m)} \times n^{(m)}$ 部分行列を対角ブロックとする対角行列となる。この場合対角化の議論は必要ないので，以下では $0 < a^{(m)2} < 1$ の場合について議論する。

F.2 $M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ の形の制限

次に，上で得られた諸関係式を用いて，$M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ の形が制限されることを見る。

$T^2/\mathbb{Z}_4$ で式 (E.22) を得たときと同様にして，ここでもそれに対応する関係式，

$$\left(M_{k\,k-q'}^{(m)[q']}M_{k\,k-q'}^{(m)[q']\dagger}\right)'_{\mathrm{D}} = \left(M_{k+q'\,k}^{(m)[q']}M_{k+q'\,k}^{(m)[q']\dagger}\right)'_{\mathrm{D}} \tag{F.19}$$

を得ることができる。$q' = 1,2,3$ である。そして $q' = 1$ としてそれをくり返し用いることにより，

$$\begin{aligned}
&\left(M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger}\right)'_{\mathrm{D}} = \left(M_{k+1\,k}^{(m)[1]}M_{k+1\,k}^{(m)[1]\dagger}\right)'_{\mathrm{D}} = \left(M_{k+2\,k+1}^{(m)[1]}M_{k+2\,k+1}^{(m)[1]\dagger}\right)'_{\mathrm{D}} \\
&= \left(M_{k+3\,k+2}^{(m)[1]}M_{k+3\,k+2}^{(m)[1]\dagger}\right)'_{\mathrm{D}} = \left(M_{k+4\,k+3}^{(m)[1]}M_{k+4\,k+3}^{(m)[1]\dagger}\right)'_{\mathrm{D}} = \left(M_{k+5\,k+4}^{(m)[1]}M_{k+5\,k+4}^{(m)[1]\dagger}\right)'_{\mathrm{D}},
\end{aligned} \tag{F.20}$$

が導かれる。式 (F.20) より，$\left(M_{k\,k-1}^{(m)[1]}M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger}\right)'_{\mathrm{D}}$ が k によらず一定であること，また $M_{k\,k-1}^{(m)[1]}$ の階数もやはり k によらず一定（以下 $r^{(m)}$ とする）であることが分かる。すると，やはり $T^2/\mathbb{Z}_4$ のときと同様，付録 G に示す議論にしたがって，

$$M_{k\,k-1}^{(m)[1]} = \left(\begin{array}{c|c|c} \hat{M}^{(m)[1]}U_{k\,k-1}^{(m)} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{F.21}$$

と書けるように基底を選ぶことができる。ここで $\hat{M}^{(m)[1]}$ は正の実数を成分とする $r^{(m)} \times r^{(m)}$ 対角行列であり，$U_{k\,k-1}^{(m)}$ は $r^{(m)} \times r^{(m)}$ ユニタリ行列である。周辺の零行列は $r^{(m)} < n_k^{(m)}$ の場合に現れる。$r^{(m)} = n_k^{(m)}$ であれば $M_{k\,k-1}^{(m)[1]} = \hat{M}^{(m)[1]}U_{k\,k-1}^{(m)}$ である。なお (F.21) は $T^2/\mathbb{Z}_4$ での式 (E.24) のように 2×2 ブロックの行列として書いてもよいのだが，後の便のために 3×3 ブロックの行列として書いた。$M_{k-1\,k}^{(m)[-1]}$ は式 (F.9) と (F.21) より，

$$M_{k-1\,k}^{(m)[-1]} = -M_{k\,k-1}^{(m)[1]\dagger} = \left(\begin{array}{c|c|c} \hat{M}^{(m)[1]}U_{k-1\,k}^{(m)} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{F.22}$$

と書ける。ここで $U^{(m)}_{k-1\,k} = -U^{(m)\dagger}_{k\,k-1}$ である。

$T^2/\mathbb{Z}_4$ での式 (E.14) および (E.22) に対応する式は $T^2/\mathbb{Z}_6$ でも成り立ち，そこで $q' = 2$ および $q' = 3$ とおくと，

$$\mathrm{rank}(M^{(m)[2]}_{k\,k-2}) = \mathrm{rank}(M^{(m)[2]}_{k+2\,k}), \tag{F.23}$$
$$\left(M^{(m)[2]}_{k\,k-2} M^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2}\right)'_{\mathrm{D}} = \left(M^{(m)[2]}_{k+2\,k} M^{(m)[2]\dagger}_{k+2\,k}\right)'_{\mathrm{D}}, \tag{F.24}$$
$$\mathrm{rank}(M^{(m)[3]}_{k\,k-3}) = \mathrm{rank}(M^{(m)[3]}_{k+3\,k}), \tag{F.25}$$
$$\left(M^{(m)[3]}_{k\,k-3} M^{(m)[3]\dagger}_{k\,k-3}\right)'_{\mathrm{D}} = \left(M^{(m)[3]}_{k+3\,k} M^{(m)[3]\dagger}_{k+3\,k}\right)'_{\mathrm{D}}, \tag{F.26}$$

という関係式が導かれる。式 (F.13) と (F.15) を用い，また $\left(M^{(m)[1]}_{k\,k-1} M^{(m)[1]\dagger}_{k\,k-1}\right)'_{\mathrm{D}}$ が k に依存しないこと，そして $M^{(m)[1]}_{k\,k-1} M^{(m)[1]\dagger}_{k\,k-1}$ が現在の基底において対角型であるということ，つまり $M^{(m)[1]}_{k\,k-1} M^{(m)[1]\dagger}_{k\,k-1} = (\hat{M}^{(m)[1]})^2 \oplus \mathbf{0}$ であるということ，を用いると，$\left(M^{(m)[2]}_{k\,k-2} M^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2}\right)'_{\mathrm{D}}$ および $\left(M^{(m)[3]}_{k\,k-3} M^{(m)[3]\dagger}_{k\,k-3}\right)'_{\mathrm{D}}$ の中で $(\hat{M}^{(m)[1]})^2$ に対応する位置にある $r^{(m)} \times r^{(m)}$ 部分行列もまた k に依存しないこと，そして $M^{(m)[2]}_{k\,k-2} M^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2}$ および $M^{(m)[3]}_{k\,k-3} M^{(m)[3]\dagger}_{k\,k-3}$ もまた現在の基底において対角行列であるということが導かれる。すると $M^{(m)[2]}_{k\,k-2}$ および $M^{(m)[3]}_{k\,k-3}$ はそれぞれ $M^{(m)[2]}_{k\,k-2} = \hat{M}^{(m)[2]} U^{(m)}_{k\,k-2} \oplus \tilde{M}^{(m)}_{k\,k-2}$ および $M^{(m)[3]}_{k\,k-3} = \hat{M}^{(m)[3]} U^{(m)}_{k\,k-3} \oplus \tilde{M}^{(m)}_{k\,k-3}$ という形に書くことができる。ここで $\hat{M}^{(m)[2]}$ と $\hat{M}^{(m)[3]}$ はともに非負の実数を成分とする $r^{(m)} \times r^{(m)}$ 対角行列 $(\hat{M}^{(m)[2]})_{ii} \geq 0$ および $(\hat{M}^{(m)[3]})_{ii} \geq 0$ であり，$U^{(m)}_{k\,k-2}$ と $U^{(m)}_{k\,k-3}$ はともに $r^{(m)} \times r^{(m)}$ ユニタリ行列である。$\hat{M}^{(m)[2]}$ および $\hat{M}^{(m)[3]}$ が $\hat{M}^{(m)[1]}$ と異なる点は，前二者では対角成分にゼロが含まれうるという点である。$\tilde{M}^{(m)}_{k\,k-2}$ および $\tilde{M}^{(m)}_{k\,k-3}$ は，$M^{(m)[1]}_{k\,k-1}$ が式 (F.21) のように表される現在の基底において，式 (F.13) が成立するために必要とされる $(n^{(m)}_k - r^{(m)}) \times (n^{(m)}_{k-2} - r^{(m)})$ や $(n^{(m)}_k - r^{(m)}) \times (n^{(m)}_{k-3} - r^{(m)})$ の部分行列である。

そして式 (F.13) – (F.18) の 6 つの式をすべて考慮すると，つまりそれらの式に $M^{(m)[1]}_{k\,k-1}$ として式 (F.21)，$M^{(m)[-1]}_{k-1\,k}$ として式 (F.22) を用い，また $M^{(m)[2]}_{k\,k-2} = \hat{M}^{(m)[2]} U^{(m)}_{k\,k-2} \oplus \tilde{M}^{(m)}_{k\,k-2}$ および $M^{(m)[3]}_{k\,k-3} = \hat{M}^{(m)[3]} U^{(m)}_{k\,k-3} \oplus \tilde{M}^{(m)}_{k\,k-3}$ を代入して，各関係式が同時に成立するために $\tilde{M}^{(m)}_{k\,k-2}$ や

$\tilde{M}^{(m)}_{k\,k-3}$ が満たさなければならない条件を丁寧に見ていくと，$M^{(m)[2]}_{k\,k-2}$ および $M^{(m)[3]}_{k\,k-3}$ は，

$$M^{(m)[2]}_{k\,k-2} = \left(\begin{array}{c|c|c} \hat{M}^{(m)[2]}U^{(m)}_{k\,k-2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3}\,\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{F.27}$$

$$M^{(m)[3]}_{k\,k-3} = \left(\begin{array}{c|c|c} \hat{M}^{(m)[3]}U^{(m)}_{k\,k-3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-3} \end{array}\right), \tag{F.28}$$

と書けることが分かる。ここで $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ と $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-3}$ はそれぞれ $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k\,k-2} = I_{n_k^{(m)\prime}}$ と $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-3}\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k\,k-3} = I_{n_k^{(m)\prime\prime}}$ を満たす行列であり，$n_k^{(m)} = r^{(m)} + n_k^{(m)\prime} + n_k^{(m)\prime\prime}$ である。ただし $n_k^{(m)\prime} \neq 0$ であるのは $a^{(m)} = -1/3$ のとき，$n_k^{(m)\prime\prime} \neq 0$ であるのは $a^{(m)} = -1/2$ のときのみである。その理由は，$\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ に $2/3$ の係数が必要であり $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ に $\pm\sqrt{3}/2$ の係数が必要であることと一緒に理解される。まず式 (F.16) より $\tilde{M}^{(m)[3]}_{k\,k-3}\tilde{M}^{(m)[-2]}_{k-3\,k-1} = 0$ であり，式 (F.9) より $\tilde{M}^{(m)[-2]}_{k-2\,k} = \tilde{M}^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2}$ であるから，任意の m について $\tilde{M}^{(m)[3]}_{k\,k-3} = 0$ もしくは $\tilde{M}^{(m)[2]}_{k-1\,k-3} = 0$ ，もしくはその両方が要求される。ただし両方ゼロにすると，全ての k について $\tilde{M}^{(m)[3]}_{k\,k-3}\tilde{M}^{(m)[-2]}_{k-3\,k-1} = 0$ および式 (F.13) を書き下したときに成り立たないものが出てくるので，要求されるのはどちらか一方である。$\tilde{M}^{(m)[3]}_{k\,k-3} = 0$ とした場合，$M^{(m)[3]}_{k\,k-3} = \hat{M}^{(m)[3]}U^{(m)}_{k\,k-3} \oplus \mathbf{0}$ であるとともに，式 (F.13) と (F.15) より

$$\left\{\begin{aligned} 2\tilde{M}^{(m)[2]}_{k\,k-2}\tilde{M}^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2} &= \left(1 - a^{(m)2}\right) I_{n_k^{(m)} - r^{(m)}}, \\ -\tilde{M}^{(m)[2]}_{k\,k-2}\tilde{M}^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2} &= \left(a^{(m)} - a^{(m)2}\right) I_{n_k^{(m)} - r^{(m)}}, \end{aligned}\right. \tag{F.29}$$

となり，これを満たすのは $a^{(m)} = -1/3$ もしくは $a^{(m)} = 1$ である。いま $0 < a^{(m)2} < 1$ の場合を考えているから，$a^{(m)} = -1/3$ である。そして $a^{(m)} = -1/3$ を式 (F.29) のどちらかに代入すると，$\tilde{M}^{(m)[2]}_{k\,k-2}\tilde{M}^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2} = \frac{4}{9}I_{n_k^{(m)} - r^{(m)}}$ を得る。すると $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k\,k-2} = I_{n_k^{(m)} - r^{(m)}}$ なる行列 $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ を用いて $\tilde{M}^{(m)[2]}_{k\,k-2} = \pm\frac{2}{3}\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ を得る。式 (F.27) では $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ の係数を $\pm 2/3$ でなく $2/3$ としているが，これは本論文での計算における最終段階で式 (3.104) の t_1' が式 (3.94)，(3.96)，(3.97) を満たすようにしたものである。また形式的に $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ の右下に零行列を並べた形で書いているが，

これは式 (F.28) を含めた体系的な書き方の試みとして行ったものである。$\tilde{M}^{(m)[2]}_{k-1\,k-3}=0$ とした場合は，式 (F.13) と (F.18) を用いた同様の計算より，そうなるのは $a^{(m)}=-1/2$ のときであり，そのとき $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-3}$ の係数は $\pm\sqrt{3}/2$ になることが導かれる。

式 (F.9) と (F.27) より，$M^{(m)[-2]}_{k-2\,k}$ は

$$M^{(m)[-2]}_{k-2\,k}=M^{(m)[2]\dagger}_{k\,k-2}=\left(\begin{array}{c|c|c} \hat{M}^{(m)[2]}U^{(m)}_{k-2\,k} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3}\,\tilde{U}^{(m)}_{k-2\,k} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{F.30}$$

で与えられる。ここで $U^{(m)}_{k-2\,k}=U^{(m)\dagger}_{k\,k-2}$ および $\tilde{U}^{(m)}_{k-2\,k}=\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k\,k-2}$ である。同様にして，$-U^{(m)\dagger}_{k\,k-3}$ や $-\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k\,k-3}$ も以下ではしばしば $U^{(m)}_{k-3\,k}$ および $\tilde{U}^{(m)}_{k-3\,k}$ と書くことにする。$M^{(m)[-3]}_{k-3\,k}$ は $M^{(m)[3]}_{k\,k-3}$ の k を $k-3$ で置き換えるだけで得られる。（いま用いている記法においては $M^{(m)[3]}_{k-3\,k-6}=M^{(m)[-3]}_{k-3\,k}$ である）。

$\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k\,k-2}=I_{n^{(m)\prime}_k}$ で k を $k+2$ に置き換え，$\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-3}\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k\,k-3}=I_{n^{(m)\prime\prime}_k}$ で k を $k+3$ に置き換えることにより，$\tilde{U}^{(m)}_{k+2\,k}\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k+2\,k}=I_{n^{(m)\prime}_{k+2}}$ および $\tilde{U}^{(m)}_{k+3\,k}\tilde{U}^{(m)\dagger}_{k+3\,k}=I_{n^{(m)\prime\prime}_{k+3}}$ が得られる。ここで $n^{(m)}_{k+2}=r^{(m)}+n^{(m)\prime}_{k+2}+n^{(m)\prime\prime}_{k+2}$ であり，$n^{(m)}_{k+3}=r^{(m)}+n^{(m)\prime}_{k+3}+n^{(m)\prime\prime}_{k+3}$ である。すると次のような関係式，

$$\mathrm{rank}(M^{(m)[2]}_{k\,k-2})=\mathrm{rank}(\hat{M}^{(m)[2]})+n^{(m)\prime}_k,\quad \mathrm{rank}(M^{(m)[2]}_{k+2\,k})=\mathrm{rank}(\hat{M}^{(m)[2]})+n^{(m)\prime}_{k+2}, \tag{F.31}$$

$$\mathrm{rank}(M^{(m)[3]}_{k\,k-3})=\mathrm{rank}(\hat{M}^{(m)[3]})+n^{(m)\prime\prime}_k,\quad \mathrm{rank}(M^{(m)[3]}_{k+3\,k})=\mathrm{rank}(\hat{M}^{(m)[3]})+n^{(m)\prime\prime}_{k+3}, \tag{F.32}$$

が得られる。式 (F.23) と (F.31) から $n^{(m)\prime}_k=n^{(m)\prime}_{k+2}$，具体的には $n^{(m)\prime}_1=n^{(m)\prime}_3=n^{(m)\prime}_5$ と $n^{(m)\prime}_2=n^{(m)\prime}_4=n^{(m)\prime}_6$ であることが導かれる。同様にして式 (F.25) と (F.32) から $n^{(m)\prime\prime}_k=n^{(m)\prime\prime}_{k+3}$，具体的には $n^{(m)\prime\prime}_1=n^{(m)\prime\prime}_4$，$n^{(m)\prime\prime}_2=n^{(m)\prime\prime}_5$，$n^{(m)\prime\prime}_3=n^{(m)\prime\prime}_6$ であることが導かれる。したがって $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-2}$ および $\tilde{U}^{(m)}_{k\,k-3}$ はそれぞれ $n^{(m)\prime}_k\times n^{(m)\prime}_k$ および $n^{(m)\prime\prime}_k\times n^{(m)\prime\prime}_k$ のユニタリ行列である。

式 (F.21)，(F.27)，(F.28) を (F.13) および (F.15) に代入すると，

$$2(\hat{M}^{(m)[1]})^2+2(\hat{M}^{(m)[2]})^2+(\hat{M}^{(m)[3]})^2=(1-a^{(m)2})I_{r^{(m)}}, \tag{F.33}$$

$$(\hat{M}^{(m)[1]})^2-(\hat{M}^{(m)[2]})^2-(\hat{M}^{(m)[3]})^2=(a^{(m)}-a^{(m)2})I_{r^{(m)}}, \tag{F.34}$$

が得られる。$T^2/\mathbb{Z}_4$ のときと同様の議論によって，$\hat{M}^{(m)[q]}U^{(m)}_{k\,k-q}$ $(q=1,2,3)$ の部分行列が非負の実数 $m^{(m)[q]}_{k'}$ とユニタリ行列（もしくは何らかの複素数）$u^{(m,k')}_{k\,k-q}$ を用いて $(\hat{M}^{(m)[q]}U^{(m)}_{k\,k-q})_{(k'l')}=$

$m_{k'}^{(m)[q]} u_{k\,k-q}^{(m,k')} \delta_{k'l'}$ と書けること，また交換関係 $[\hat{M}^{(m)[q]}, U_{k\,k-q'}^{(m)}] = 0$ が任意の q と q' について成り立つことが示せる。なお $\hat{M}^{(m)[0]} = a^{(m)} I_{r^{(m)}}$，$U_{k\,k}^{(m)} = I_{r^{(m)}}$, $\hat{M}^{(m)[-q]} = \hat{M}^{(m)[q]}$，$U_{k-q\,k}^{(m)} = (-1)^q U_{k\,k-q}^{(m)\dagger}$ である。

(F.21)，(F.22)，(F.27) – (F.30) を (F.10) に代入すると，

$$U_{k\,k-q'}^{(m)} U_{k-q'\,k-q}^{(m)} = U_{k\,k-q+q'}^{(m)} U_{k-q+q'\,k-q}^{(m)} \tag{F.35}$$

が得られる。後の利用のために少し下付き添字を調整して，k を $k-r$ に置き換えて書くと，

$$U_{k-r\,k-r-q'}^{(m)} U_{k-r-q'\,k-r-q}^{(m)} = U_{k-r\,k-r-q+q'}^{(m)} U_{k-r-q+q'\,k-r-q}^{(m)}, \tag{F.36}$$

である。さらに添字の置き換えをしたものを書き下しておくと，

$$U_{k-q\,k-q-q'}^{(m)} U_{k-q-q'\,k}^{(m)} = U_{k-q\,k+q'}^{(m)} U_{k+q'\,k}^{(m)}, \qquad U_{k\,k-q'}^{(m)} U_{k-q'\,k+q}^{(m)} = U_{k\,k+q+q'}^{(m)} U_{k+q+q'\,k+q}^{(m)}, \tag{F.37}$$

となる。第一の式は式 (F.36) の r を q で，q を $-q$ で置き換えたものであり，第二の式は r を 0 で，q を $-q$ で置き換えたものである。$T^2/\mathbb{Z}_4$ における式 (E.31) のときと同様，厳密に言うと式 (F.36) によって $U_{k\,k-q}^{(m)}$ が制限されるのは $m_{k'}^{(m)[2]}$ と $m_{k'}^{(m)[3]}$ のどちらも 0 でないような部分についてだけである。$(\hat{M}^{(m)[q]} U_{k\,k-q}^{(m)})_{(k'l')} = m_{k'}^{(m)[q]} u_{k\,k-q}^{(m,k')} \delta_{k'l'}$ において $m_{k'}^{(m)[2]} = 0$ や $m_{k'}^{(m)[3]} = 0$ の場合は，$u_{k\,k-q}^{(m,k')}$ は任意であっても (F.10) を満たすからである。しかし逆に任意であることを利用して，そこでの $u_{k\,k-q}^{(m,k')}$ も式 (F.36) を満たすように選ぶことができる。そこで以下ではそのように選んだものとして議論を進める。

式 (F.37) を用いると，

$$J_{kk}^{(m)} \equiv U_{k\,k-1}^{(m)} U_{k-1\,k-2}^{(m)} U_{k-2\,k}^{(m)} = U_{k\,k-1}^{(m)} U_{k-1\,k+1}^{(m)} U_{k+1\,k}^{(m)} = U_{k\,k+2}^{(m)} U_{k+2\,k+1}^{(m)} U_{k+1\,k}^{(m)}, \tag{F.38}$$

$$\begin{aligned} K_{kk}^{(m)} &\equiv U_{k\,k+1}^{(m)} U_{k+1\,k-2}^{(m)} U_{k-2\,k}^{(m)} = U_{k\,k+1}^{(m)} U_{k+1\,k+3}^{(m)} U_{k+3\,k}^{(m)} = U_{k\,k+2}^{(m)} U_{k+2\,k+3}^{(m)} U_{k+3\,k}^{(m)} \\ &= U_{k\,k+2}^{(m)} U_{k+2\,k-1}^{(m)} U_{k-1\,k}^{(m)} = U_{k\,k+3}^{(m)} U_{k+3\,k-1}^{(m)} U_{k-1\,k}^{(m)} = U_{k\,k-3}^{(m)} U_{k-3\,k-2}^{(m)} U_{k-2\,k}^{(m)}, \end{aligned} \tag{F.39}$$

という関係式を書くことができる。そして式 (F.37) – (F.39) を用いると，ここに定義した $J_{kk}^{(m)}$ と $K_{kk}^{(m)}$ が交換することが次のようにして分かる。

$$\begin{aligned} & J_{kk}^{(m)} K_{kk}^{(m)} = U_{k\,k+2}^{(m)} U_{k+2\,k+1}^{(m)} U_{k+1\,k}^{(m)} \cdot U_{k\,k+1}^{(m)} U_{k+1\,k-2}^{(m)} U_{k-2\,k}^{(m)} \\ &= -U_{k\,k+2}^{(m)} U_{k+2\,k+1}^{(m)} U_{k+1\,k-2}^{(m)} U_{k-2\,k}^{(m)} = -U_{k\,k+2}^{(m)} U_{k+2\,k-1}^{(m)} U_{k-1\,k-2}^{(m)} U_{k-2\,k}^{(m)} \\ &= U_{k\,k+2}^{(m)} U_{k+2\,k-1}^{(m)} U_{k-1\,k}^{(m)} \cdot U_{k\,k-1}^{(m)} U_{k-1\,k-2}^{(m)} U_{k-2\,k}^{(m)} = K_{kk}^{(m)} J_{kk}^{(m)}. \end{aligned} \tag{F.40}$$

したがって $J_{kk}^{(m)}$ と $K_{kk}^{(m)}$ は適切なユニタリ変換により同時対角化が可能である。さらに，$U_{k\,k-q}^{(m)}$ を３種類かけあわせたものとしてこの後出てくるもうひとつの重要な類型は $U_{k\,k+2}^{(m)}U_{k+2\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k}^{(m)}$ であるが，これは $U_{k\,k+2}^{(m)}U_{k+2\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k}^{(m)} = -K_{kk}^{(m)}K_{kk}^{(m)}J_{kk}^{(m)}$ と書けることが次のようにして分かる。複雑な計算になるが，$-U_{k+2\,k-3}^{(m)}U_{k-3\,k}^{(m)}U_{k\,k-3}^{(m)}U_{k-3\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k}^{(m)}U_{k\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k-3}^{(m)}U_{k-3\,k+2}^{(m)} = I_{n_k^{(m)}}$ と $U_{k\,k+2}^{(m)}U_{k+2\,k-2}^{(m)}$ を $U_{k-2\,k}^{(m)}$ に代入し，式 (F.36) – (F.39) を用いて整理していくことで，

$$\begin{aligned}
&U_{k\,k+2}^{(m)}U_{k+2\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k}^{(m)} \\
&= -U_{k\,k+2}^{(m)}\cdot U_{k+2\,k-3}^{(m)}U_{k-3\,k}^{(m)}U_{k\,k-3}^{(m)}U_{k-3\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k}^{(m)}U_{k\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k-3}^{(m)}U_{k-3\,k+2}^{(m)}\cdot U_{k+2\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k}^{(m)} \\
&= -K_{kk}^{(m)}K_{kk}^{(m)}U_{k\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k-3}^{(m)}U_{k-3\,k+2}^{(m)}U_{k+2\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k}^{(m)} \\
&= -K_{kk}^{(m)}K_{kk}^{(m)}U_{k\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k-3}^{(m)}U_{k-3\,k-1}^{(m)}U_{k-1\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k}^{(m)} \\
&= -K_{kk}^{(m)}K_{kk}^{(m)}U_{k\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k}^{(m)}U_{k\,k-1}^{(m)}U_{k-1\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k}^{(m)} = -K_{kk}^{(m)}K_{kk}^{(m)}U_{k\,k-1}^{(m)}U_{k-1\,k-2}^{(m)}U_{k-2\,k}^{(m)} \\
&= -K_{kk}^{(m)}K_{kk}^{(m)}J_{kk}^{(m)},
\end{aligned} \tag{F.41}$$

と導かれる。

(F.21)，(F.22)，(F.27) – (F.30) を式 (F.14) に代入すると，

$$2a^{(m)}\hat{M}^{(m)[2]} - (\hat{M}^{(m)[2]})^2K_{kk}^{(m)}K_{kk}^{(m)}J_{kk}^{(m)} = (\hat{M}^{(m)[1]})^2J_{kk}^{(m)} + 2\hat{M}^{(m)[1]}\hat{M}^{(m)[3]}K_{kk}^{(m)}, \tag{F.42}$$

$$\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)} - \tilde{U}_{k\,k+2}^{(m)}\tilde{U}_{k+2\,k-2}^{(m)} = 0, \tag{F.43}$$

という関係が得られる。同様に，やはり (F.21)，(F.22)，(F.27) – (F.30) を式 (F.16) – (F.18) に代入すると，

$$(1-a^{(m)})\hat{M}^{(m)[1]} = -\hat{M}^{(m)[3]}\hat{M}^{(m)[2]}K_{kk}^{(m)} + 2\hat{M}^{(m)[2]}\hat{M}^{(m)[1]}J_{kk}^{(m)\dagger}, \tag{F.44}$$

$$(1+a^{(m)})\hat{M}^{(m)[2]} = (\hat{M}^{(m)[1]})^2J_{kk}^{(m)} - \hat{M}^{(m)[1]}\hat{M}^{(m)[3]}K_{kk}^{(m)} - (\hat{M}^{(m)[2]})^2K_{kk}^{(m)}K_{kk}^{(m)}J_{kk}^{(m)}, \tag{F.45}$$

$$(1+2a^{(m)})\hat{M}^{(m)[3]} = -\hat{M}^{(m)[1]}\hat{M}^{(m)[2]}(K_{kk}^{(m)\dagger} + K_{kk}^{(m)}), \tag{F.46}$$

が得られる。

以上のようにして，$M_{k\,l}^{(m)[k-l]}$ の形は，式 (F.33)，(F.34)，(F.42)，(F.44)，(F.45)，(F.46) を満たす $\hat{M}^{(m)[1]}$，$\hat{M}^{(m)[2]}$，$\hat{M}^{(m)[3]}$，式 (F.36)，(F.42)，(F.44)， (F.45)，(F.46) を満たす $U_{k\,l}^{(m)}$，そして式 (F.43) を満たす $\tilde{U}_{k\,k-2}^{(m)}$ を用い，式 (F.21)，(F.22)，(F.27)，(F.28)，(F.30) と書かれるような形に制限される。

F.3　$T_1^{(m)}$ の部分行列の対角化と並び替え

$T_1^{(m)}$ の部分行列 $M_{k\,k-q}^{(m)[q]}$ が (F.21)，(F.22)，(F.27) – (F.30) のように書かれるとき，$R_0^{(m)}$ と $T_1^{(m)}$ は行と列の適当な並び替えによって，以下のようなブロック対角型の行列に書くことができる：

$$R_0^{(m)} = \begin{pmatrix} R_0^{(m)'} & & \\ & R_0^{(m)''} & \\ & & R_0^{(m)'''} \end{pmatrix} = R_0^{(m)'} \oplus R_0^{(m)''} \oplus R_0^{(m)'''}, \tag{F.47}$$

$$R_0^{(m)'} = \begin{pmatrix} \eta I_{r^{(m)}} & & & & & \\ & \eta^2 I_{r^{(m)}} & & & & \\ & & -I_{r^{(m)}} & & & \\ & & & -\eta I_{r^{(m)}} & & \\ & & & & -\eta^2 I_{r^{(m)}} & \\ & & & & & I_{r^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{F.48}$$

$$R_0^{(m)''} = \begin{pmatrix} \eta I_{n_1^{(m)'}} & & & & & \\ & \eta^2 I_{n_2^{(m)'}} & & & & \\ & & -I_{n_1^{(m)'}} & & & \\ & & & -\eta I_{n_2^{(m)'}} & & \\ & & & & -\eta^2 I_{n_1^{(m)'}} & \\ & & & & & I_{n_2^{(m)'}} \end{pmatrix}, \tag{F.49}$$

$$R_0^{(m)'''} = \begin{pmatrix} \eta I_{n_1^{(m)''}} & & & & & \\ & \eta^2 I_{n_2^{(m)''}} & & & & \\ & & -I_{n_3^{(m)''}} & & & \\ & & & -\eta I_{n_1^{(m)''}} & & \\ & & & & -\eta^2 I_{n_2^{(m)''}} & \\ & & & & & I_{n_3^{(m)''}} \end{pmatrix}, \tag{F.50}$$

および

$$T_1^{(m)} = \begin{pmatrix} T_1^{(m)'} & & \\ & T_1^{(m)''} & \\ & & T_1^{(m)'''} \end{pmatrix} = T_1^{(m)'} \oplus T_1^{(m)''} \oplus T_1^{(m)'''}, \tag{F.51}$$

$$
T_1^{(m)\prime} = \begin{pmatrix}
a^{(m)} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{12}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{13}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[3]} U_{14}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{15}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{16}^{(m)} \\
\hat{M}^{(m)[1]} U_{21}^{(m)} & a^{(m)} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{23}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{24}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[3]} U_{25}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{26}^{(m)} \\
\hat{M}^{(m)[2]} U_{31}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{32}^{(m)} & a^{(m)} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{34}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{35}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[3]} U_{36}^{(m)} \\
\hat{M}^{(m)[3]} U_{41}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{42}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{43}^{(m)} & a^{(m)} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{45}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{46}^{(m)} \\
\hat{M}^{(m)[3]} U_{51}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{52}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{53}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{54}^{(m)} & a^{(m)} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{56}^{(m)} \\
\hat{M}^{(m)[3]} U_{61}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{62}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{63}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[1]} U_{64}^{(m)} & \hat{M}^{(m)[2]} U_{65}^{(m)} & a^{(m)} I_{r^{(m)}}
\end{pmatrix}, \tag{F.52}
$$

$$
T_1^{(m)\prime\prime} = \begin{pmatrix}
-\frac{1}{3} I_{n_1^{(m)\prime}} & 0 & \frac{2}{3}\tilde{U}_{13}^{(m)} & 0 & \frac{2}{3}\tilde{U}_{15}^{(m)} & 0 \\
0 & -\frac{1}{3} I_{n_2^{(m)\prime}} & 0 & \frac{2}{3}\tilde{U}_{24}^{(m)} & 0 & \frac{2}{3}\tilde{U}_{26}^{(m)} \\
\frac{2}{3}\tilde{U}_{31}^{(m)} & 0 & -\frac{1}{3} I_{n_1^{(m)\prime}} & 0 & \frac{2}{3}\tilde{U}_{35}^{(m)} & 0 \\
0 & \frac{2}{3}\tilde{U}_{42}^{(m)} & 0 & -\frac{1}{3} I_{n_2^{(m)\prime}} & 0 & \frac{2}{3}\tilde{U}_{46}^{(m)} \\
\frac{2}{3}\tilde{U}_{51}^{(m)} & 0 & \frac{2}{3}\tilde{U}_{53}^{(m)} & 0 & -\frac{1}{3} I_{n_1^{(m)\prime}} & 0 \\
0 & \frac{2}{3}\tilde{U}_{62}^{(m)} & 0 & \frac{2}{3}\tilde{U}_{64}^{(m)} & 0 & -\frac{1}{3} I_{n_2^{(m)\prime}}
\end{pmatrix}, \tag{F.53}
$$

$$
T_1^{(m)\prime\prime\prime} = \begin{pmatrix}
-\frac{1}{2} I_{n_1^{(m)\prime\prime}} & 0 & 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{U}_{14}^{(m)} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} I_{n_2^{(m)\prime\prime}} & 0 & 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{U}_{25}^{(m)} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} I_{n_3^{(m)\prime\prime}} & 0 & 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{U}_{36}^{(m)} \\
\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{U}_{41}^{(m)} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I_{n_1^{(m)\prime\prime}} & 0 & 0 \\
0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{U}_{52}^{(m)} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I_{n_2^{(m)\prime\prime}} & 0 \\
0 & 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{U}_{63}^{(m)} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I_{n_3^{(m)\prime\prime}}
\end{pmatrix},
\quad \text{(複合同順)}. \tag{F.54}
$$

ここで $U_{k-q\,k}^{(m)} = (-1)^q U_{k\,k-q}^{(m)\dagger}$，$\tilde{U}_{k-q\,k}^{(m)} = (-1)^q \tilde{U}_{k\,k-q}^{(m)\dagger}$ である。

この次に行う計算の便のため，式 (F.38)，(F.39)，(F.41) で具体的に $k=2$ としたものを書き下しておくと，

$$
J_{22}^{(m)} = U_{21}^{(m)} U_{16}^{(m)} U_{62}^{(m)} = U_{21}^{(m)} U_{13}^{(m)} U_{32}^{(m)} = U_{24}^{(m)} U_{43}^{(m)} U_{32}^{(m)}, \tag{F.55}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{22}^{(m)} &= U_{23}^{(m)} U_{36}^{(m)} U_{62}^{(m)} = U_{23}^{(m)} U_{35}^{(m)} U_{52}^{(m)} = U_{24}^{(m)} U_{45}^{(m)} U_{52}^{(m)} \\
&= U_{24}^{(m)} U_{41}^{(m)} U_{12}^{(m)} = U_{25}^{(m)} U_{51}^{(m)} U_{12}^{(m)} = U_{25}^{(m)} U_{56}^{(m)} U_{62}^{(m)},
\end{aligned} \tag{F.56}
$$

$$
U_{24}^{(m)} U_{46}^{(m)} U_{62}^{(m)} = -K_{22}^{(m)} K_{22}^{(m)} J_{22}^{(m)}, \tag{F.57}
$$

である。また式 (F.43) から，

$$
\tilde{U}_{35}^{(m)} \tilde{U}_{51}^{(m)} \tilde{U}_{13}^{(m)} = I_{n_1^{(m)\prime}}, \qquad \tilde{U}_{46}^{(m)} \tilde{U}_{62}^{(m)} \tilde{U}_{24}^{(m)} = I_{n_2^{(m)\prime}}, \tag{F.58}
$$

である。

最後に，以下の $V^{(m)\prime}$，$V^{(m)\prime\prime}$，$V^{(m)\prime\prime\prime}$ を用いて $V^{(m)} = V^{(m)\prime} \oplus V^{(m)\prime\prime} \oplus V^{(m)\prime\prime\prime}$ と書かれるユニタリ行列 $V^{(m)}$ によるユニタリ変換を行う：

$$V^{(m)\prime} = \begin{pmatrix} \hat{\Theta}^{(m)[1]\dagger} U^{(m)} U_{21}^{(m)} & & & & & \\ & U^{(m)} & & & & \\ & & -\hat{\Theta}^{(m)[1]} U^{(m)} U_{23}^{(m)} & & & \\ & & & \hat{\Theta}^{(m)[2]} U^{(m)} U_{24}^{(m)} & & \\ & & & & iU^{(m)} U_{25}^{(m)} & \\ & & & & & \hat{\Theta}^{(m)[2]\dagger} U^{(m)} U_{26}^{(m)} \end{pmatrix}, \tag{F.59}$$

$$V^{(m)\prime\prime} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{31}^{(m)} & & & & & \\ & \tilde{U}_{42}^{(m)} & & & & \\ & & I_{n_1^{(m)\prime}} & & & \\ & & & I_{n_2^{(m)\prime}} & & \\ & & & & \tilde{U}_{35}^{(m)} & \\ & & & & & \tilde{U}_{46}^{(m)} \end{pmatrix}, \tag{F.60}$$

$$V^{(m)\prime\prime\prime} = \begin{pmatrix} -i\tilde{U}_{41}^{(m)} & & & & & \\ & -i\tilde{U}_{52}^{(m)} & & & & \\ & & -i\tilde{U}_{63}^{(m)} & & & \\ & & & I_{n_1^{(m)\prime\prime}} & & \\ & & & & I_{n_2^{(m)\prime\prime}} & \\ & & & & & I_{n_3^{(m)\prime\prime}} \end{pmatrix}. \tag{F.61}$$

ここで $U^{(m)}$ は $J_{22}^{(m)}$ と $K_{22}^{(m)}$ とをそれぞれ $\hat{J}_{22}^{(m)} (= U^{(m)} J_{22}^{(m)} U^{(m)\dagger})$ と $\hat{K}_{22}^{(m)} (= U^{(m)} K_{22}^{(m)} U^{(m)\dagger})$ という対角行列へと同時対角化するユニタリ行列であり，$\hat{M}^{(m)[q]}$ と交換する。$\hat{\Theta}^{(m)[1]}$ は三乗すると $i\hat{K}_{22}^{(m)\dagger} \hat{J}_{22}^{(m)}$ と一致するような対角型ユニタリ行列であり，$\hat{\Theta}^{(m)[2]}$ は三乗すると $-\hat{J}_{22}^{(m)\dagger} \hat{K}_{22}^{(m)\dagger 2}$ と一致するような対角型ユニタリ行列である。上記の $V^{(m)}$ を用いてユニタリ変換を行うと，$R_0^{(m)\prime}$，$R_0^{(m)\prime\prime}$，$R_0^{(m)\prime\prime\prime}$ は不変に保たれる一方，$T_1^{(m)\prime}$，$T_1^{(m)\prime\prime}$，$T_1^{(m)\prime\prime\prime}$ は $U_{k-q\,k}^{(m)} = (-1)^q U_{k\,k-q}^{(m)\dagger}$，$\tilde{U}_{k-q\,k}^{(m)} = (-1)^q \tilde{U}_{k\,k-q}^{(m)\dagger}$，そして式 (F.55) – (F.58) を用いることにより，

$$T_1^{(m)'} =$$

$$\begin{pmatrix} a^{(m)} I_{r^{(m)}} & -\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{[1]\dagger} & \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{[2]\dagger} & -i\hat{M}^{(m)[3]} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{[2]} & \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{[1]} \\ \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{[1]} & a^{(m)} I_{r^{(m)}} & -\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{[1]\dagger} & \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{[2]\dagger} & -i\hat{M}^{(m)[3]} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{[2]} \\ \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{[2]} & \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{[1]} & a^{(m)} I_{r^{(m)}} & -\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{[1]\dagger} & \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{[2]\dagger} & -i\hat{M}^{(m)[3]} I_{r^{(m)}} \\ -i\hat{M}^{(m)[3]} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{[2]} & \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{[1]} & a^{(m)} I_{r^{(m)}} & -\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{[1]\dagger} & \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{[2]\dagger} \\ \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{[2]\dagger} & -i\hat{M}^{(m)[3]} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{[2]} & \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{[1]} & a^{(m)} I_{r^{(m)}} & -\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{[1]\dagger} \\ -\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{[1]\dagger} & \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{[2]\dagger} & -i\hat{M}^{(m)[3]} I_{r^{(m)}} & \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{[2]} & \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{[1]} & a^{(m)} I_{r^{(m)}} \end{pmatrix}, \tag{F.62}$$

$$T_1^{(m)''} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} I_{n_1^{(m)'}} & 0 & \frac{2}{3} I_{n_1^{(m)'}} & 0 & \frac{2}{3} I_{n_1^{(m)'}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} I_{n_2^{(m)'}} & 0 & \frac{2}{3} I_{n_2^{(m)'}} & 0 & \frac{2}{3} I_{n_2^{(m)'}} \\ \frac{2}{3} I_{n_1^{(m)'}} & 0 & -\frac{1}{3} I_{n_1^{(m)'}} & 0 & \frac{2}{3} I_{n_1^{(m)'}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} I_{n_2^{(m)'}} & 0 & -\frac{1}{3} I_{n_2^{(m)'}} & 0 & \frac{2}{3} I_{n_2^{(m)'}} \\ \frac{2}{3} I_{n_1^{(m)'}} & 0 & \frac{2}{3} I_{n_1^{(m)'}} & 0 & -\frac{1}{3} I_{n_1^{(m)'}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} I_{n_2^{(m)'}} & 0 & \frac{2}{3} I_{n_2^{(m)'}} & 0 & -\frac{1}{3} I_{n_2^{(m)'}} \end{pmatrix}, \tag{F.63}$$

$$T_1^{(m)'''} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} I_{n_1^{(m)''}} & 0 & 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} i I_{n_1^{(m)''}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} I_{n_2^{(m)''}} & 0 & 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} i I_{n_2^{(m)''}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} I_{n_3^{(m)''}} & 0 & 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} i I_{n_3^{(m)''}} \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} i I_{n_1^{(m)''}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I_{n_1^{(m)''}} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} i I_{n_2^{(m)''}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I_{n_2^{(m)''}} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} i I_{n_3^{(m)''}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I_{n_3^{(m)''}} \end{pmatrix},$$

$$\text{(複合同順)}, \tag{F.64}$$

という形へと変換される。つまり部分行列がすべて対角型であるような行列になる。それぞれを数式の形で表すと,

$$(T_1^{(m)'})_{(kk-q)} = \hat{M}^{(m)[q]}\hat{\Theta}^{(m)[q]} I_{r^{(m)}}, \qquad (T_1^{(m)''})_{(kk-q)} = \left(-\frac{1}{3}\delta_{q\,0} + \frac{2}{3}\delta_{q\,\pm 2}\right) I_{n_k^{(m)'}},$$
$$(T_1^{(m)'''})_{(kk-q)} = \left(-\frac{1}{2}\delta_{q\,0} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_{q\,3}\right) I_{n_k^{(m)''}}, \tag{F.65}$$

である。なお $\hat{\Theta}^{(m)[-q]} = (-1)^q \hat{\Theta}^{(m)[q]\dagger}$, $\hat{\Theta}^{(m)[0]} = I_{r^{(m)}}$, $\hat{\Theta}^{(m)[3]} = -iI_{r^{(m)}}$ であり, また $n_k^{(m)'} = n_{k+2}^{(m)'}$ ならびに $n_k^{(m)''} = n_{k+3}^{(m)''}$ である。そして式 (F.42), (F.44) – (F.46) を用いると, $\hat{\Theta}^{(m)[1]}$, $\hat{\Theta}^{(m)[2]}$, およびそれらのエルミート共役との間には,

$$2a^{(m)}\hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{(m)[2]} + (\hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{(m)[2]\dagger})^2 = (\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]})^2 - 2\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]\dagger}\hat{M}^{(m)[3]}\hat{\Theta}^{(m)[3]}, \tag{F.66}$$

$$(1-a^{(m)})\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]} = \hat{M}^{(m)[3]}\hat{\Theta}^{(m)[3]}\hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{(m)[2]\dagger} + 2\hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{(m)[2]}\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]\dagger}, \tag{F.67}$$

$$(1+a^{(m)})\hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{(m)[2]} = (\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]})^2 + \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]\dagger}\hat{M}^{(m)[3]}\hat{\Theta}^{(m)[3]} + (\hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{(m)[2]\dagger})^2, \tag{F.68}$$

$$(1+2a^{(m)})\hat{M}^{(m)[3]}\hat{\Theta}^{(m)[3]} = \hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]}\hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{(m)[2]} - \hat{M}^{(m)[2]}\hat{\Theta}^{(m)[2]\dagger}\hat{M}^{(m)[1]}\hat{\Theta}^{(m)[1]\dagger}, \tag{F.69}$$

という相互制約関係があることが分かる。

G　$AA^\dagger$ および $A^\dagger A$ が対角型である場合の，行列 A の可能な形について

A を大きさ $l_1 \times l_2$，階数 r の行列とする。一般に A は $l_i \times l_i$ のユニタリ行列 U_i $(i=1,2)$ と $l_1 \times l_2$ の行列 $\hat{A}$ を用いて，$A = U_1^\dagger \hat{A} U_2$ と書くことができる。$\hat{A}$ はさらに大きさ $r \times r$ の対角行列 $\hat{A}_r$ を用いて

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{A}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \tag{G.1}$$

と書くことができる。$\hat{A}_r$ は

$$\hat{A}_r = \begin{pmatrix} a_1 I_{n_1} & & & 0 \\ & a_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_q I_{n_q} \end{pmatrix}, \qquad a_k > 0 \qquad \text{for} \quad k = 1, \ldots, q, \tag{G.2}$$

のようにとることができる。ここで $k \neq k'$ に対し $a_k \neq a_{k'}$ であり，n_k は $\sum_{k=1}^{q} n_k = r$ を満たす正の整数であり，I_{n_k} は $n_k \times n_k$ の単位行列である。a_k としては任意の複素数をとってもよいが，ここでは虚数成分や負の係数は U_1 や U_2 のほうに持たせ，a_k を正の実数とした。このとき，

$$U_1 A A^\dagger U_1^\dagger = \hat{A}\hat{A}^\dagger = \begin{pmatrix} \hat{A}_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U_2 A^\dagger A U_2^\dagger = \hat{A}^\dagger \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{G.3}$$

が成り立つ。なお 1 番目の式は $l_1 \times l_1$ の行列，2 番目の式は $l_2 \times l_2$ の行列であるから，一般に両者の間では周辺の零行列の大きさが異なり，$\hat{A}\hat{A}^\dagger \neq \hat{A}^\dagger \hat{A}$ である。

$AA^\dagger$ と $A^\dagger A$ がともに対角型の行列として与えられた場合を考える。このとき一般に a_k^2 や 0 が任意の順番で対角に並んだ行列となるが，それらがちょうど $AA^\dagger = \hat{A}\hat{A}^\dagger$ および $A^\dagger A = \hat{A}^\dagger \hat{A}$

と表されているような基底をとったとする。すると $U_1AA^\dagger U_1^\dagger = AA^\dagger$ および $U_2A^\dagger AU_2^\dagger = A^\dagger A$ が成り立ち，$[U_1, AA^\dagger] = 0$ および $[U_2, A^\dagger A] = 0$ となる。このとき U_i の可能な形は,

$$U_i = \left(\begin{array}{cccc|c} u_i^{(1)} & & & 0 & 0 \\ & u_i^{(2)} & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & u_i^{(q)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{u}_i \end{array}\right), \tag{G.4}$$

へと制限される。$u_i^{(k)}$ と $\tilde{u}_i$ はそれぞれ $n_k \times n_k$ と $(l_i - r) \times (l_i - r)$ のユニタリ行列である。すると A の一般的な形として

$$A = U_1^\dagger \hat{A} U_2 = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \tilde{A}_r = \begin{pmatrix} a_1\tilde{u}^{(1)} & & & 0 \\ & a_2\tilde{u}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_q\tilde{u}^{(q)} \end{pmatrix} = \hat{A}_r U, \tag{G.5}$$

を書くことができる。ここで $\hat{A}_r$ は式 (G.2) に見られるように部分行列 $(\hat{A}_r)_{(kl)} = a_k I_{n_k} \delta_{kl}$ $(k, l = 1, \cdots, q)$ からなる対角行列であり，U は部分行列 $(U)_{(kl)} = \tilde{u}^{(k)}\delta_{kl}$ を対角に並べたユニタリ行列である。$\tilde{u}^{(k)}$ は $\tilde{u}^{(k)} = u_1^{(k)\dagger} u_2^{(k)}$ で定義される $n_k \times n_k$ のユニタリ行列である。また U が $\hat{A}_r$ と交換することも分かる。

H　式 (E.3) および (F.4) の導出

$T^2/\mathbb{Z}_N$ $(N = 3, 4, 6)$ におけるユニタリ行列 R_0 および T_1 は，$\tau = e^{2\pi i/N}$ として $(R_0)_{(kl)} = \tau^k \delta_{kl} I_{n_k}$ および $(T_1)_{(kl)} = M_{k\,l}^{[k-l]}$ と書かれる部分行列から成る。上付き添え字の $k - l = q$ は R_0 によって生成される $\mathbb{Z}_N$ 対称性のチャージを表す。つまり $(R_0 T_1 R_0^{-1})_{(k\,k-q)} = \tau^q M_{k\,k-q}^{[q]}$ である。$M_{k\,l}^{[k-l]}$ については，$k' = k \pmod N$ および $l' = l \pmod N$ に対して $M_{k\,l}^{[k-l]} = M_{k\,l}^{[k'-l']} = M_{k'\,l'}^{[k-l]}$ とする記法を用いることができる。

式 (E.3) および (F.4)，つまり $M_{k\,k-q'}^{[q']} M_{k-q'\,k-q}^{[q-q']} = M_{k\,k-q+q'}^{[q-q']} M_{k-q+q'\,k-q}^{[q']}$ は以下のようにして導かれる。まず，並進 T_m は $T_m \equiv R_0^{m-1} T_1 R_0^{1-m}$ で定義することができ，したがって関係式 $T_{m'} T_m = T_m T_{m'}$ から $T_1 R_0^{m-m'} T_1 = R_0^{m-m'} T_1 R_0^{m'-m} T_1 R_0^{m-m'}$ という式が導かれる。これを用いると,

$$\sum_{q'} \tau^{l(k-q')} M_{k\,k-q'}^{[q']} M_{k-q'\,k-q}^{[q-q']} = \sum_{q'} \tau^{l(k+q'-q)} M_{k\,k-q'}^{[q']} M_{k-q'\,k-q}^{[q-q']}, \tag{H.1}$$

という関係式が導かれる。ここで $l=m-m'$ は整数をとり，q' に関する和は $q'=1$ から $q'=N$ までの整数でとる。式 (H.1) の右辺で q' を $q-q'$ に置き換えると，

$$\sum_{q'} \tau^{l(k-q')} M^{[q']}_{k\,k-q'} M^{[q-q']}_{k-q'\,k-q} = \sum_{q'} \tau^{l(k-q')} M^{[q-q']}_{k\,k-q+q'} M^{[q']}_{k-q+q'\,k-q}, \tag{H.2}$$

が得られる。式 (H.2) の両辺に $\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\tau^{l(q''-k)}$ をかけ，$\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\tau^{l(q''-q')}=\delta_{q''\,q'}$ であることを用いると，

$$M^{[q']}_{k\,k-q'} M^{[q-q']}_{k-q'\,k-q} = M^{[q-q']}_{k\,k-q+q'} M^{[q']}_{k-q+q'\,k-q}, \tag{H.3}$$

が得られる。ここで q'' を q' で置き換えた。なお $\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\tau^{l(q''-q')}=\delta_{q''\,q'}$ は $T^2/\mathbb{Z}_3$ で用いた $1+\omega+\omega^2=0$ を一般化したものである。他方，参照のために，式 (H.3) を用いると

$$\begin{aligned} M^{[q'']}_{k\,k-q''} M^{[q']}_{k-q''\,k-q''-q'} M^{[q-q']}_{k-q''-q'\,k-q''-q} &= M^{[q']}_{k\,k-q'} M^{[q'']}_{k-q'\,k-q''-q'} M^{[q-q']}_{k-q''-q'\,k-q''-q} \\ &= M^{[q']}_{k\,k-q'} M^{[q-q']}_{k-q'\,k-q} M^{[q'']}_{k-q\,k-q-q''}, \end{aligned} \tag{H.4}$$

という関係式が得られることに着目する。式 (H.4) で $q=0$ および $q''=0$ とすると，

$$[M^{[0]}_{k\,k}, M^{[q']}_{k\,k-q'} M^{[-q']}_{k-q'\,k}] = 0. \tag{H.5}$$

という関係式が得られる。

I　式 (3.96) – (3.100) の導出

$N=3$ の場合には，

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3-3a_1a_2a_3=1, \quad |a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2=1, \quad \overline{a_1}a_3+\overline{a_3}a_2+\overline{a_2}a_1=0. \tag{I.1}$$

という関係式が成立する。式 (I.1) の最初の関係式，および 2 番目の式と 3 番目の式を組み合わせた式からは，それぞれ，

$$(\omega a_1+\omega^2 a_2+a_3)(\omega^2 a_1+\omega a_2+a_3)(a_1+a_2+a_3)=1, \tag{I.2}$$

$$\left|\omega a_1+\omega^2 a_2+a_3\right|^2=\left|\omega^2 a_1+\omega a_2+a_3\right|^2=|a_1+a_2+a_3|^2=1, \tag{I.3}$$

が得られる。$\alpha_j\equiv\sum_{p=1}^{3}a_j\omega^{jp}$ を用いると，式 (I.2) と (I.3) はそれぞれ，

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=1, \qquad |\alpha_j|^2=1, \quad (j=1,2,3), \tag{I.4}$$

と書くことができる。

$N=4$ と $N=6$ の場合の式 (3.96)，(3.98)，(3.99) も，これと同じようにして求めることができる。$N=4$ の場合はパラメータ $a_2=\overline{a_2}$，$a_3=-\overline{a_1}$，$a_4=\overline{a_4}$ の間に成り立つ関係式 $2|a_1|^2+a_2^2+a_4^2=1$ と $2a_2a_4=a_1^2+\overline{a_1}^2$ から求められる。$N=6$ の場合はパラメータ $a_3=-\overline{a_3}$，$a_4=\overline{a_2}$，$a_5=-\overline{a_1}$，$a_6=\overline{a_6}$ の間に成り立つ関係式 $2|a_1|^2+2|a_2|^2+|a_3|^2+a_6^2=1$，$|a_1|^2-|a_2|^2-|a_3|^2+a_6^2=a_6$，$2a_2a_6+\overline{a_2}^2=a_1^2-2\overline{a_1}a_3$，$a_1a_6+a_3\overline{a_2}+2a_2\overline{a_1}=a_1$，$-a_2a_6+a_1^2+\overline{a_1}a_3+\overline{a_2}^2=a_2$，$-2a_3a_6+a_1a_2-\overline{a_1a_2}=a_3$ から求められる。

ここでは，なぜ式 (3.96) – (3.99) が成り立つのかを説明する。$t_1=\sum_{p=1}^N a_pY^p$ および $t_m\equiv r_0^{m-1}t_1r_0^{1-m}$ から，

$$t_m=X^{m-1}(\sum_{p=1}^N a_pY^p)X^{1-m}=\sum_{p=1}^N a_p\tau^{(m-1)p}Y^p, \tag{I.5}$$

が得られる。ここで $X^mY^{m'}=\tau^{mm'}Y^{m'}X^m$ を用いた。N 個のユニタリ行列 t_m は，次のようなユニタリ変換ですべて同時に対角化することができる：

$$Ut_mU^\dagger=\sum_{p=1}^N a_p\tau^{(m-1)p}(UYU^\dagger)^p=\sum_{p=1}^N a_p\tau^{(m-1)p}X^p. \tag{I.6}$$

ここで X，Y，U の (j,j') 成分はそれぞれ，

$$(X)_{jj'}=\tau^j\delta_{jj'},\qquad (Y)_{jj'}=\delta_{j\,j'+1},\qquad (U)_{jj'}=\frac{1}{\sqrt{N}}\tau^{j(j'+1)}, \tag{I.7}$$

で与えられる。$Ut_mU^\dagger$ は t_m が従うのと同じ制約条件に従うから，その固有値もまた同じ制約条件に従う。行列 $Ut_mU^\dagger$ の $(1,1)$ 成分は $(Ut_mU^\dagger)_{11}=\sum_{p=1}^N a_p\tau^{mp}$ で与えられる。これを $\alpha_m=\sum_{p=1}^N a_p\tau^{mp}$ とする。すると α_m は $t_m^\dagger t_m=I$ および Table 2 に示された個別の制約条件に対応して，関係式 (3.96) – (3.99) に従うことが分かる。$Ut_mU^\dagger$ の他の対角成分についても同様のことが言え，同様の関係式が得られる。

最後に，式 (3.100) すなわち $t_1=\sum_{p=1}^N a_pY^p=e^{i\left(\theta Y+\bar{\theta}Y^{N-1}\right)}$ を求める。式 (3.96) – (3.99) より，$\alpha_j=\sum_{p=1}^N a_p\tau^{jp}$ は複素数のパラメータ θ によって，

$$\alpha_j=\sum_{p=1}^N a_p\tau^{jp}=e^{i\left(\theta\tau^j+\bar{\theta}\bar{\tau}^j\right)}, \tag{I.8}$$

と表すことができる。なぜならば $N=3,4,6$ の場合 α_j の中で独立なパラメータは 2 つだからである。ここでは $N=6$ の場合を例にとって式 (I.8) を説明する。式 (3.96) より α_j は実数パラメータ φ_j を用いて $\alpha_j=e^{i\varphi_j}$ と表すことができる。式 (3.99) より各 φ_j の間には

$\varphi_1+\varphi_4=\varphi_2+\varphi_5=\varphi_3+\varphi_6=\varphi_1+\varphi_3+\varphi_5=\varphi_2+\varphi_4+\varphi_6=0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ という関係が成り立つ。このうち例えば φ_2 と φ_6 を独立なものとして選ぶと，残りは $\varphi_1=\varphi_2+\varphi_6$，$\varphi_3=-\varphi_6$，$\varphi_4=-\varphi_2-\varphi_6$，$\varphi_5=-\varphi_2\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ のように決まる。すると，φ_2 と φ_6 から作った複素パラメータ $\theta=\frac{1}{2}\varphi_6-\frac{i}{2\sqrt{3}}(2\varphi_2+\varphi_6)$ を用いることにより，φ_j は $\eta=e^{2\pi i/6}$ を用いて $\varphi_j=\theta\eta^j+\bar{\theta}\bar{\eta}^j$ と表すことができる。$N=3,4$ の場合にも，これと同様にして α_j を式 (I.8) のように表すことができる。式 (I.8) と $(X)_{jj'}=\tau^j\delta_{jj'}$ を用いると，

$$\sum_{p=1}^{N} a_p X^p = e^{i\left(\theta X+\bar{\theta}\bar{X}\right)} = e^{i\left(\theta X+\bar{\theta}X^{N-1}\right)}, \tag{I.9}$$

という関係式が得られる。そして式 (I.9) に対し $U^\dagger XU=Y$ のようなユニタリ変換を施すと，式 (3.100)，すなわち

$$t_1=\sum_{p=1}^{N} a_p Y^p = e^{i\left(\theta Y+\bar{\theta}Y^{N-1}\right)}, \tag{I.10}$$

を得る。

参照のため，式 (I.8) の両辺に $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tau^{-jp'}$ をかけ，$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tau^{j(p-p')}=\delta_{pp'}$ を用いると，ry

$$a_p=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\tau^{-jp}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tau^{-jp}e^{i\left(\theta\tau^j+\bar{\theta}\bar{\tau}^j\right)}, \tag{I.11}$$

という関係式が得られる。ここで p' を p で置き換えた。

References

[1] N. Manton, *A new six-dimensional approach to the Weinberg-Salam model*, *Nucl. Phys.* B **158** (1979), 141.

[2] H. Georgi and S. L. Glashow, *Unity of All Elementary Particle Forces*, *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 438.

[3] S. Dimopoulos and H. Georgi, *Softly broken supersymmetry and SU(5)*, *Nucl. Phys.* B **193** (1981) 150.

[4] N. Sakai, *Naturalness in supersymmetric GUTS*, *Z. Phys.* C **11** (1981) 153.

[5] Y. Kawamura, *Gauge Symmetry Reduction from the Extra Space S^1/Z_2*, *Prog. Theor. Phys.* **103** (2000) 613 [arXiv:hep-ph/9902423].

[6] Y. Kawamura, *Triplet-doublet Splitting, Proton Stability and an Extra Dimension*, *Prog. Theor. Phys.* **105** (2001) 999 [arXiv:hep-ph/0012125].

[7] M. Kubo, C. S. Lim and H. Yamashita, *The Hosotani mechanism in bulk gauge theories with an orbifold extra space S^1/Z_2*, *Mod. Phys. Lett.* A **17** (2002) 2249 [arXiv:hep-ph/0111327].

[8] C. Csaki, C. Grojean and H. Murayama, *Standard model Higgs from higher dimensional gauge fields*, *Phys. Rev.* D **67** (2003) 085012 [arXiv:hep-ph/0210133].

[9] C. A. Scrucca, M. Serone and L. Silvestrini, *Electroweak symmetry breaking and fermion masses from extra dimensions*, *Nucl. Phys.* B **669** (2003) 128 [arXiv:hep-ph/0304220].

[10] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen and H. Georgi, *Electroweak symmetry breaking from dimensional deconstruction*, *Phys. Lett.* B **513** (2001) 232 [arXiv:hep-ph/0105239].

[11] N. V. Krasnikov, *Ultraviolet Fixed Point Behavior Of The Five-Dimensional Yang-Mills Theory, The Gauge Hierarchy Problem And A Possible New Dimension At The Tev Scale*, *Phys. Lett.* B **273** 246 (1991).

[12] H. Hatanaka, T. Inami and C. S. Lim, *The gauge hierarchy problem and higher dimensional gauge theories*, *Mod. Phys. Lett.* A **13** 2601 (1998) [arXiv:hep-th/9805067].

[13] N. Maru and T. Yamashita, *Two-loop calculation of Higgs mass in gauge-Higgs unification: 5D massless QED compactified on S^1*, *Nucl. Phys.* B **754** 127 (2006) [arXiv:hep-ph/0603237].

[14] Y. Hosotani, N. Maru, K. Takenaga and T. Yamashita, *Two loop finiteness of Higgs mass and potential in the gauge-Higgs unification*, *Prog. Theor. Phys.* **118** 1053 (2007) [arXiv:0709.2844 [hep-ph]].

[15] J. Hisano, Y. Shoji and A. Yamada, *To be, or not to be finite? The Higgs potential in Gauge Higgs Unification*, *JHEP* **02** (2020), 193 [arXiv:1908.09158 [hep-ph]].

[16] N. Haba, Y. Hosotani, Y. Kawamura and T. Yamashita, *Dynamical symmetry breaking in gauge Higgs unification on orbifold*, *Phys. Rev.* D **70** (2004) 015010 [arXiv:hep-ph/0401183].

[17] C. S. Lim and N. Maru, *Towards a realistic grand gauge-Higgs unification*, *Phys. Lett.* B **653** (2007) 320-324 [arXiv:0706.1397 [hep-ph]].

[18] Y. Hosotani and N. Yamatsu, *Gauge–Higgs grand unification*, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015** (2015) 111B01 [arXiv:1504.03817 [hep-ph]].

[19] K. Kojima, K. Takenaga and T. Yamashita, *The Standard Model Gauge Symmetry from Higher-Rank Unified Groups in Grand Gauge-Higgs Unification Models*, *JHEP* **06** (2017) 018 [arXiv:1704.04840 [hep-ph]].

[20] L. Hall and Y. Nomura, *Gauge Unification in Higher Dimensions*, *Phys. Rev.* D **64** (2001) 055003 [arXiv:hep-ph/0103125].

[21] K. Kojima, K. Takenaga and T. Yamashita, *Grand Gauge-Higgs Unification*, *Phys. Rev.* D **84** (2011) 051701 [arXiv:1103.1234 [hep-ph]].

[22] K. Kojima, K. Takenaga and T. Yamashita, *Gauge symmetry breaking patterns in an SU(5) grand gauge-Higgs unification model*, *Phys. Rev.* D **95** (2017) 015021 [arXiv:1608.05496 [hep-ph]].

[23] T. Yamashita, *Doublet-Triplet Splitting in an SU(5) Grand Unification*, *Phys. Rev.* D **84** (2011) 115016 [arXiv:1106.3229 [hep-ph]].

[24] M. Kakizaki, S. Kanemura, H. Taniguchi and T. Yamashita, *Higgs sector as a probe of supersymmetric grand unification with the Hosotani mechanism*, *Phys. Rev.* D **89** (2014) 075013 [arXiv:1312.7575 [hep-ph]].

[25] H. Nakano, M. Sato, O. Seto and T. Yamashita, *Dirac gaugino from grand gauge-Higgs unification*, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2022** (2022) 033B06 [arXiv:2201.04428 [hep-ph]].

[26] M. Sakamoto, M. Takeuchi, Y. Tatsuta, it Zero-mode counting formula and zeros in orbifold compactifications, *Phis. Rev.* D **102** (2020) 025008 [arXiv:2004.05570].

[27] T. Kobayashi, H. Otsuka, M. Sakamoto, M. Takeuchi, Y. Tatsuta and H. Uchida, *Index theorem on magnetized blow-up manifold of T^2/Z_N*, (2022) [arXiv:2211.04595].

[28] T. Kobayashi, H. Otsuka, M. Sakamoto, M. Takeuchi, Y. Tatsuta and H. Uchida, *Zero-mode wave functions by localized gauge fluxes*, (2022) [arXiv:2211.04596].

[29] Y. Hosotani, *Dynamical mass generation by compact extra dimensions*, *Phys. Lett.* B **126** (1983) 309.

[30] Y. Hosotani, *Dynamics of Nonintegrable Phases and Gauge Symmetry Breaking*, *Ann. of Phys* **190** (1989) 233.

[31] N. Haba, M. Harada, Y. Hosotani and Y. Kawamura, *Dynamical rearrangement of gauge symmetry on the Orbifold S^1/Z_2*, *Nucl. Phys.* B **657** (2003) 169 [*Errata ibid* B **669** (2003) 381] [arXiv:hep-ph/0212035].

[32] N. Haba, Y. Hosotani and Y. Kawamura, *Classification and Dynamics of Equivalence Classes in $SU(N)$ gauge theory on the orbifold S^1/Z_2*, *Prog. Theor. Phys.* **111** (2004) 265 [arXiv:hep-ph/0309088].

[33] N. Haba and T. Yamashita, *A General formula of the effective potential in 5-D SU(N) gauge theory on orbifold*, *JHEP* **02** (2004) 059 [arXiv:hep-ph/0401185].

[34] Y. Kawamura, T. Kinami and T. Miura, *Equivalence Classes of Boundary Conditions in Gauge Theory on Z_3 Orbifold*, *Prog. Theor. Phys.* **120** (2008) 815 [arXiv:0808.2333].

[35] Y. Kawamura and T. Miura, *Equivalence Classes of Boundary Conditions in $SU(N)$ Gauge Theory on 2-Dimensional Orbifolds*, *Prog. Theor. Phys.* **122** (2009) 847

[arXiv:0905.4123].

[36] Y. Goto and Y. Kawamura, *Orbifold family unification using vectorlike representation on six dimensions*, *Phys. Rev.* D **98** (2018) 035039 [arXiv:1712.06444].

[37] Y. Hosotani, S. Noda and K. Takenaga, *Dynamical gauge symmetry breaking and mass generation on the Orbifold* T^2/Z_2, *Phys. Rev.* D **69** (2004) 125014 [arXiv:hep-ph/0403106].

[38] Y. Kawamura and Y. Nishikawa, *On diagonal representatives in boundary condition matrices on orbifolds*, *Int. J. Mod. Phys.* A **35** (2020) 2050206 [arXiv:2009.10958].

[39] Y. Kawamura, E. Kodaira, K. Kojima and T. Yamashita, *On representation matrices of boundary conditions in SU(n) gauge theories compactified on two-dimensional orbifolds*, *JHEP* **04** (2023) 113 [arXiv:2211.00877].

[40] 細谷裕，ゲージヒッグス統合理論　素粒子理論のその先へ，臨時別冊・数理科学　SGC ライブラリ 143，サイエンス社，2018.

[41] 近藤慶一，ゲージ場の量子論入門　質量ギャップとクォーク閉じ込めの解決に向けて，臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 45，サイエンス社，2006.

[42] T. Appelquist, H.C. Cheng, and B. A. Dobrescu, "Bounds on Universal Extra Dimensions", *Phis. Rev.* D**64**, 035002 (2001).

[43] A. Hebecker and J. March-Russel, *A Minimal* $S^1/(Z_2 \times Z_2')$ *Orbifold GUT*, *Nucl. Phys.* B **613** (2001) 3 [arXiv:hep-ph/0106166].

[44] L. Nilse, *Classification of 1D and 2D orbifolds*, *AIP Conf. Proc.* **903**,1 (2007) 411 [arXiv:hep-ph/0601015].

[45] G. 't Hooft, *A Property of Electric and Magnetic Flux in Nonabelian Gauge Theories*, *Nucl. Phys.* B **153** (1979) 141.

[46] G. von Gersdorff, *A New Class of Rank Breaking Orbifolds*, *Nucl. Phys.* B **793** (2008) 192 [arXiv:0705.2410].

[47] C. Bachas, *A way to break supersymmetry*, [arXiv:hep-ph/9503030].

[48] C. A. Scrucca and M. Serone, *Anomalies in field theories with extra dimensions*, *Int. J. Mod. Phys.* A **19** (2004) 2579 [hep-th/0403163].

[49] S. Förste, H. P. Nilles and A. Wingerter, *Geometry of Rank Reduction*, *Phys. Rev.* D **72** (2005) 026001 [arXiv:hep-ph/0504117].